

## 花紋折りに基づくスマッキングのパターン作成と組み合わせのデザイン

吉田哲也<sup>1)</sup> (正会員) 藤崎千晶<sup>2)</sup>

1) 奈良女子大学大学院生活環境科学系 2) 奈良女子大学大学院生活工学共同専攻

## Smocking Pattern Generation based on Petaloid Folding and Combinatorial Design of Patterns

Tetsuya Yoshida<sup>1)</sup> Chiaki Fujisaki<sup>2)</sup>

1) Nara Women's University, Graduate School of Faculty of Human Life and Environment

2) Nara Women's University, Cooperative Major in Human Centered Engineering

### 概要

本稿では折り紙における花紋折りに基づくスマッキングのパターン作成と組み合わせのデザインを提案する。スマッキングとはパターンで指定される点をすくい縫って布を縫い絞り、プリーツを展開して装飾を造形する手芸技法であるが、布の表面に造形したい装飾の設計図に対応するパターンを作成することは容易ではないという課題がある。造形操作が布の折り畳みに基づくことに着目し、本稿では花紋折りと呼ばれる折り紙に対応するスマッキングに焦点を当て、折り畳んだ際に布が重なる箇所を縫い留める点として特定してパターンを作成するアプローチを提案する。このアプローチの下で、展開図に表現される多角形の幾何学的変換によりパターンを生成する手法を提案するとともに、変換における幾何的な性質を示す。特に、任意の三角形に対して花紋折りを実現するための折り線の角度と対応するパターンを示す。さらに、しわがよらない綺麗な模様を布の表面に造形するためにプリーツの共有に基づく組み合わせのアプローチを提案し、三角形の花紋折りを活用したデザインを提案する。提案法を GeoGebra を用いて実装し、提案法でデザインしたスマッキングの制作と被服への応用を通じて本稿のアプローチを検証した。

### Abstract

This paper proposes a smocking pattern generation method based on petaloid folding and combinatorial design of smocking patterns. Smocking is a handcraft technique of sewing and making pleats over cloth, however, it is not easy to generate the pattern for the desired shape on the surface of cloth. For the type of smocking which corresponds to petaloid folding in Origami, we propose to sew down the intersection of folded pieces of cloth so that the formed shape can be kept on the flexible cloth. We propose a smocking pattern generation method based on the geometric transformation of polygons in a crease pattern, and show the geometric characteristics in the transformation. Especially, we show the angle for petaloid folding of any triangles and the corresponding pattern. Furthermore, we propose an approach for combinatorial design of patterns based on pleats sharing, and show a class of combinatorial design by exploiting petaloid folding of a triangle. The proposed method is implemented using GeoGebra, and it is validated through a newly designed combinatorial pattern and smocked textile based on the generated pattern.

## 1 はじめに

手芸とは手作業で造形する技術や造形された制作物の総称であり [1], フリマアプリなどの CtoC 取引の増加に伴って手芸作品を造形して販売する人が近年増えている。手芸では一般に造形時の指針となる設計図に対応する編み図や図案などに基づいて造形するが、造形操作と造形される形状との対応をイメージしながら設計図を作成することは容易ではないため、これまでは手芸技術に長けた熟練者が試行錯誤を通じて考案したデザインを使用することが多かった。手芸が生活における趣味や娯楽として浸透するなかで、造形したい形状を自らデザインすることが容易ではないということが作品を自由に制作することの妨げになる恐れがある。

近年の計算機技術の発展に伴い、手芸などの造形における幾何的な性質を活用したデザイン支援の試みも行われている [2, 3, 4]。たとえば毛糸を手で編む“あみぐるみ”に対する支援 [2] や、細長いバルーンをひねって造形するバルーンアートのデザイン支援 [3, 4] などが提案されている。著者らも、手作業で被服を制作する営みにおいて、布の縫い絞りと折り畳みを通じて模様を造形するスマッキングという技法に対して折り紙に基づく枠組みを提案した [5]。紙を素材とする折り紙で知られていた花紋折りに着目し、布を素材とするスマッキングにおける模様の形状と造形操作折り紙の考え方に基づいて定式化するとともに、折り紙の展開図に基づくデザイン支援の枠組みを示した。しかし、造形できる模様が正多角形に限定されており、また、模様の組み合わせのデザインを十分に扱えていないという課題があった。

本稿では、折り紙の考え方に基づいて布の表面に模様を造形するという枠組みにおいて、造形可能な模様の形状を拡張するとともに、拡張した模様に対する組み合わせのデザインを提案する。布は柔らかいため造形した形状を固定する必要があるという課題に対処するため、折り畳みを通じて布が重なる箇所を縫い留める点として特定することでスマッキングのパターンを生成するアプローチを提案する。このアプローチのもとで、折り紙における花紋折りを拡張した模様（本稿では花紋スマッキングと呼ぶ）に対してパターンを生成する方法を提案するとともに、造形する模様とパターンの幾何的な性質を明らかにする。さらに、布の表面に複雑な装飾を施すことを実現するために、花紋スマッキングの幾何的な性質を活用した組み合わせのデザインを提案する。

提案法を幾何学ソフトウェア GeoGebra を用いて実装し、提案法を用いてデザインしたスマッキングの制作と被服への応用を通じて本稿のアプローチを検証した。花紋スマッキングの形状や配置の変更を通じて作成した組み合わせのデザインを報告するとともに、デザインした装飾を施して制作した被服を報告する。

2 節で手芸におけるスマッキングへの折り紙に基づく枠組みを紹介し、3 節で折り紙の考え方に基づいて布の表面に造形できる形状を拡張した花紋スマッキングのパターン生成を提案する。4 節で花紋スマッキングの幾何的な性質を活用した組み合わせのデザインと被服への応用を述べる。5 節で関連研究を紹介し、6 節でまとめと今後の展望を述べる。

## 2 スマッキングへの折り紙に基づく枠組み

### 2.1 スマッキング



図1 スマッキングの例

スマッキングとは手芸技法の1つであり、縫い縮めたギャザーにかがりを入れたり、縫い絞ったプリーツを浮彫り風にするものである [1]。スマッキングを施すことで生地立体化が生じ、被服の表面に美しさや個性を演出できるためファッションにも用いられている。スマッキングは一般に (1) ベーシックスマッキング (図1左)、(2) イタリアンスマッキング (図1中央)、(3) ラティスマッキング (図1右) の3種類に大別されるが、著者らは幾何的な繰り返し模様が多く、被服への応用例がそれほど多くないラティスマッキングに対して折り紙に基づく提案した [5]。

スマッキングにおける造形操作の概略を図2に示す。スマッキングではすくい縫いを通じて布を固定する箇所はパターン\*1に表現されるため、図2のStep.1でまずパターンを布に転写し、パターンで指定される点を順にすくい縫う。次に、糸を引き縮めてすくった全ての頂点を一点に集め、玉止めして固定する (Step.2)。最後に、

\*1 スマッキングにおいて被服の型紙に相当するものを本稿ではパターンと呼ぶ。

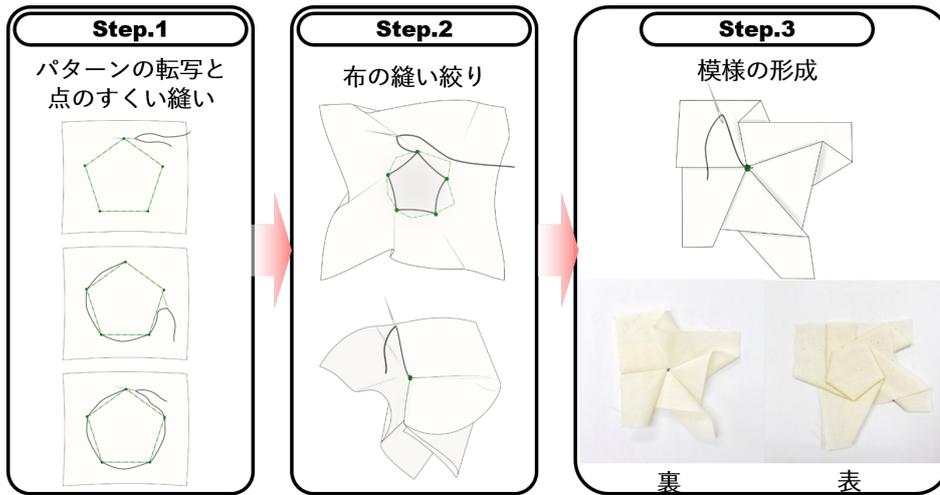


図2 スモッキングの造形操作

布の縫い絞りで生成されるプリーツを平坦にして布の表面に浮き上がる多角形の装飾（本稿では模様と呼ぶ）を造形する (Step.3).

## 2.2 折り紙に基づくスモッキングの造形操作の表現

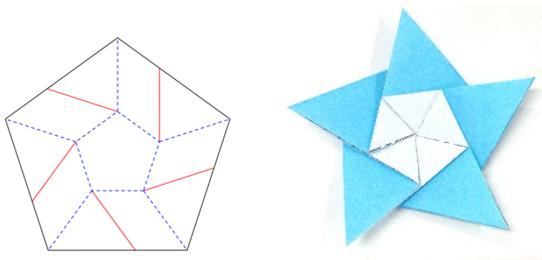


図3 折り紙の展開図の例

図4 図3の展開図を折った後の形状

折り紙とは紙を素材とする平面グラフを折ってできる形状や折り操作のことであり、折り方を指定する線は折り線と呼ばれる。折り紙における平面グラフは展開図と呼ばれ、折り方には山折りと谷折りの2種類がある [6] が、本稿では山折りを赤の実線、谷折りを青の破線で表す。展開図の例を図3に示すが、この展開図で表現される折り線を山折り、谷折りのラベルに従って折ってできる折り紙を図4に示す。図4に示す折り紙は中央の正多角形の模様が花卉のように見えるため花紋折りと呼ばれる。折り紙の数理においては、任意の正多角形に対して花紋折りを造形できることが知られており、花紋折りとなるための条件や造形される模様の性質などが知られている [7].

幾何的な繰り返し模様が多用されるラティススモッキングの中でも正多角形の模様に着目し、著者らはスモッキングで造形する模様と布の折り畳み操作を通じた造形過程を折り紙の考え方に基づいて示した [5]. しかし、造形できる模様の形状が従来の折り紙で扱われてきた正多角形に限られるとともに、模様の組み合わせのデザインを十分に扱えていないという課題がある。そこで、本稿ではスモッキングで造形できる模様の形状を正多角形から一般の形状に拡張するとともに、拡張した模様に対する組み合わせのデザインを提案する。なお、山折りと谷折りは対称なため、本稿では花紋折りの展開図において中央の多角形 \*2 を構成する折り線はすべて谷折りとする。

## 3 花紋スモッキングのパターン生成

### 3.1 花紋折りの拡張

スモッキングの造形操作において布を縫い絞った後にプリーツを展開して模様を形成する際、プリーツが重なったり自己交差すると平坦とならず被服の裏地として使用しにくいという課題に対処するため、本稿では折り畳んだ後の形状が平らとなる平坦折りを扱う。折り畳みを通じて造形される形状が平坦とはならない立体折り [8] などと異なり、平坦折りでは折り畳みを通じた造形後の形状がひとつに定まりやすいという利点もある。

展開図の多角形における各頂点の次数 \*3 を4とする

\*2 図3における中央の青の破線で構成される五角形。

\*3 頂点に接続する辺の数。

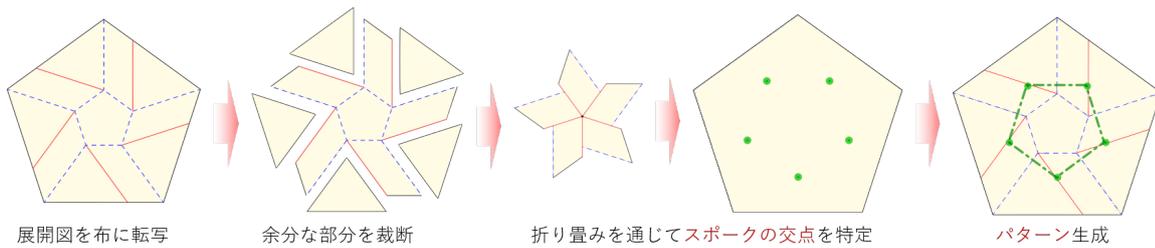


図 6 スモッキングのパターン生成

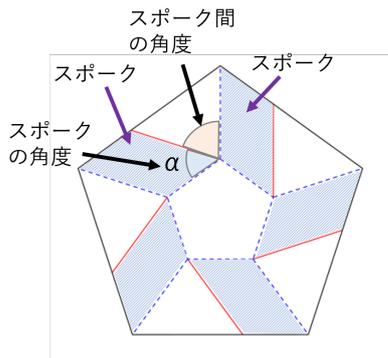


図 5 花紋折りにおけるスポークと角度

表 1 花紋折りの種類

		スポークの交点	
		すべて 1 点で交わる	1 点で交わらない
多角形	正	伝統花紋折り	擬花紋折り
	一般	多角形の 花紋折り	多角形の 擬花紋折り

### 3.2 スポークの交点に基づくパターンの作成

本稿では布を対象として、折り紙における花紋折りを図 2 に示す操作を通じて造形することや布の表面に造形される模様を花紋スモッキングと呼ぶ。折り紙の展開図に表現される折り線に従って布を折り畳むことは可能であるが、紙などと異なり被服で用いる布は柔らかいため、折り畳んだだけでは形状を維持出来ないという課題がある。このため、スモッキングに限らず布で造形するには、造形した形状を固定するために縫い止める箇所を特定する必要がある。2.1 節で述べたように、スモッキングではすくい縫いを通じて布を固定する箇所はパターンにおける点として表現されてきた。

本稿では、展開図に従って布を折り畳んだ際にスポークが重なる箇所(スポークの交点)を縫い留める点とすることで花紋スモッキングのパターンを作成するアプローチを提案する(図 6 参照)。スポークの交点を明確にするために、図 6 ではスポーク以外の余分な部分を裁断してスポークの折り畳みを考えて交点を特定し、生成したパターンを布に転写した展開図に重畳表示した例を示している。スモッキングのパターンで指定する点を本稿では緑の点として表現するが、パターンにおける形状がわかりやすくなるよう、パターンの点を接続した線分も緑の一点破線で示す。

### 3.3 展開図に基づくパターン生成と幾何的な性質

表 1 で挙げた 4 種類の花紋折りに共通する性質として、中央の多角形に接するすべてのスポークにおいてスポークの角度が等しいことが挙げられる。この性質を活

と、前川定理や川崎定理などの折り紙の数理で知られている一頂点平坦折りに関する知見 [9] から、花紋折りの展開図において多角形を構成する各辺から伸びる一対の山折り線と谷折り線が平行になるという性質がある(図 5 参照)。この性質に着目して、本稿では各頂点の次数はすべて 4 とし、多角形から平行に伸びる一対の山折り線と谷折り線を含む領域をスポークと呼び、スポークに着目したアプローチを提案する。また、多角形とスポークの山折り線が成す角をスポークの角度  $\alpha$ 、隣接するスポーク同士の間の角度をスポーク間の角度と呼ぶ。

折り紙として造られてきた従来の花紋折りでは中央の多角形は正多角形に限られていたが、近年、折り紙の数理において花紋折りの拡張が提案されており [7]、一般の多角形に拡張したものも提案されている。また、スポークを多角形の谷折り線で折る際、すべてのスポークが一点で交わるという制約を緩和したものは「擬」花紋折りと呼ばれる。これは、図 5 におけるスポークの角度に対する制約を緩和することに対応する。これらの拡張と区別するために、中心の多角形が正多角形ですべてのスポークが 1 点で交わるものを本稿では伝統花紋折りと呼ぶ。拡張も含めた花紋折りの種類を表 1 に示す。

用して、本節では表 1 に示した 1) 伝統花紋折り, 2) 擬花紋折り, 3) 多角形の花紋折り, に対して, 展開図からスモッキングのパターンを生成する手法と, 展開図における多角形と生成するパターンの幾何的な性質を述べる. なお, 多角形の擬花紋折りの一般的な扱いは今後の課題である.

一般の多角形に対しても, すべてのスポークが一点で交わる花紋折りという考え方はあったが, 具体的なデザインにはあまり活用されてこなかった. 本稿では, 任意の三角形に対して花紋折りを実現するためのスポークの角度を三角形の形状から導出する (3.3.3 節). さらに, 導出した式や形状の幾何的な性質を活用した花紋スモッキングの組み合わせのデザイン (4 節) を示す.

表 1 における 1) 伝統花紋折り, 2) 擬花紋折り, は任意の正多角形に対して定義されるため, 以下では頂点数  $n$  の正多角形の内角  $\frac{n-2}{n}\pi$  を  $\theta_n$  と表記し, 角度の方向は反時計回りとする. なお, 多角形の花紋折りにおいてすべてのスポークの山折り線が交わる点を, 本稿では“花心”と呼ぶこととする \*4.

本稿のアプローチにおける形状の性質の概略を図 7 に示す. 図 7 における  $\alpha$  は図 5 で示したスポークの角度である. また, 回転中心を赤の点で示すとともに, そのまわりの回転を赤の矢印で表している. 図 7 に示すように, 提案法では折り方を指定する展開図に表現される多角形の幾何学的変換を通じてスモッキングのパターンを生成するため, 変換における相似比と回転角も導出する. 以下ではそれぞれの生成手順と幾何的な性質を述べるが, 証明などの詳細については付録で示す.

### 3.3.1 伝統花紋スモッキング

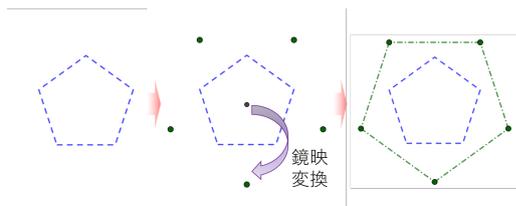


図 8 伝統花紋スモッキングのパターン生成

伝統花紋スモッキングのパターン生成と性質については [5] で述べたが, 他の種類の花紋スモッキングとの対

\*4 三角形における内心や外心のような特殊な点は非常に多く定義されている [10] が, 本稿では多角形の花紋折りにおけるスポークの交点を便宜的に“花心”と呼ぶこととし, 数学における定義との対応付けなどは今後の課題とする.

比のために本稿でも述べる. 図 8 に示すように,

1. 展開図の正多角形の中心を同定
2. 正多角形の中心を正多角形の各辺で鏡映変換した点をそれぞれ同定
3. 同定した点を連結してパターンにおける正多角形を生成

の手順で展開図からパターンとなる正多角形を生成する. このとき, 以下が成り立つ.

**定理 1.** 展開図の正多角形と生成されるパターンの正多角形との相似比は  $1 : 2 \sin \frac{\theta_n}{2}$  である. また, 展開図の正多角形からパターンへの回転角は  $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2}$  である.

定理 1 の証明は付録 A に示す.

### 3.3.2 擬花紋スモッキング

頂点数  $n$  の正多角形に対して, スポークの角度  $\alpha$  が  $\alpha \in (0, \frac{\theta_n}{2})$  であれば擬花紋折りが可能であるが, 展開図に表現される正多角形の谷折り線でスポークを折り畳むことにより, 擬花紋折りでは隣り合う 2 つのスポークの山折り線それぞれ一点で交わることになる. この性質に基づき, 以下の手順でパターンを生成する (図 9 参照).

1. 2 つのスポークの山折り線を正多角形の辺でそれぞれ鏡映変換し, 交点を同定
2. 同定した交点を, 再度, 正多角形の辺でそれぞれ鏡映変換し, スポークの山折り線上の点を同定
3. 同定した 2 点を連結してパターンとなる線分を生成

この手順により, 展開図の正多角形における各頂点に対してパターンとなる線分 (正確には線分の両端の点) がそれぞれ生成される. このとき, 以下が成り立つ.

**定理 2.** 擬花紋スモッキングのパターンにおける線分は, 展開図における正多角形の各頂点に対して生成される. このとき, 伝統花紋スモッキングのパターンにおける線分と擬花紋スモッキングのパターンにおける線分の長さの比は  $\sin \frac{\theta_n}{2} : \sin \alpha$  であり, 対応する展開図の頂点を中心に前者の線分から  $\frac{\theta_n}{2} - \alpha$  回転したものである.

定理 2 の証明は付録 B に示す.

### 3.3.3 三角形の花紋スモッキング

展開図やパターンは平面図形であるため, 本稿では 2 次元の単体である三角形に対する花紋スモッキングに対するパターンの生成手順を述べる. 花紋折りの定義

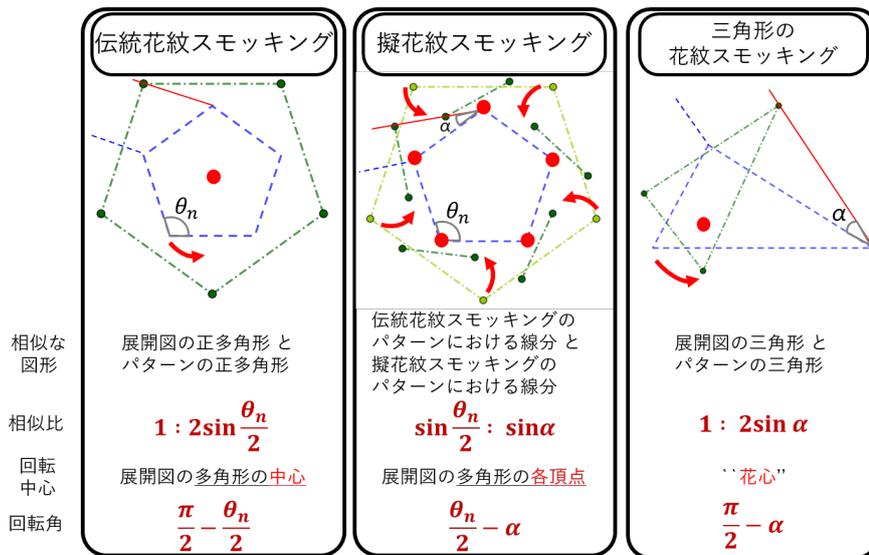


図7 展開図とスモッキングのパターンの幾何的な性質

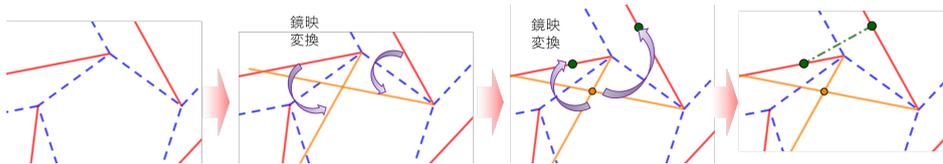


図9 擬花紋スモッキングのパターン生成

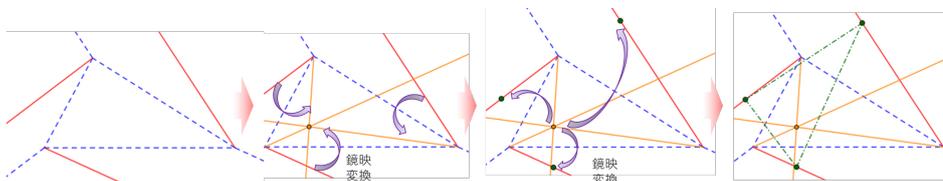


図11 三角形の花紋スモッキングのパターン生成

花紋スモッキング		多角形の頂点を 一点に縫い合わせ	複数の線分を それぞれ縫い合わせ
パターンの多角形	正	伝統花紋スモッキング 	擬花紋スモッキング 
	一般	多角形の花紋スモッキング 	多角形の擬花紋スモッキング 

図12 花紋スモッキングの例（それぞれ、左：パターン，中央：布の表面に造形される模様，右：裏面）

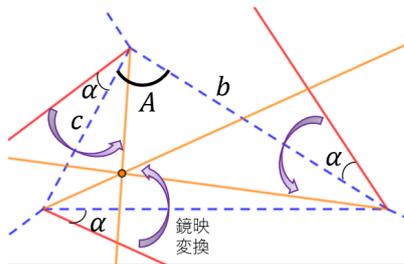


図 10 三角形の花紋折り

から、任意の三角形に対して、三角形の各辺に接するスポークをそれぞれの辺で谷折りした際に、スポークの山折り線が一点で交わることになる (図 10 参照)。

一般の三角形に対して花紋折りを実現する角度は、その内角に基づいても表現できるが [11]、本稿では二つの辺の長さとその間の角度に基づく表現を提案する。

**定理 3.** 任意の三角形において、最小の内角を  $A$ 、この角に接続する辺の長さを  $b, c$ 、とする。このとき、花紋折りを實現するスポークの角度  $\alpha$  は

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\left\{ \left( \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) - \cos A \right\}^2 + \sin^2 A}} \sin A \right)$$

と表せる。

定理 3 の証明は付録 C に示す。定理 3 を用いて、図 10 のような一般の三角形に対して花紋スマッキングを実現するスポークの角度を決定して展開図を作成することにより、展開図から対応するパターンを生成できる。この性質に基づき、以下の手順でパターンを生成する (図 11 参照)。

1. スポークの山折り線をそれぞれ三角形の各辺で鏡映変換し、交点を同定
2. 交点を、再度、三角形の辺でそれぞれ鏡映変換し、スポークの山折り線上の点を同定
3. 同定した点を連結してパターンにおける多角形 (この場合は三角形) を生成

パターン生成の手順は擬花紋折りスマッキングの場合と類似しているが、上記で生成するパターンでは以下の幾何的な性質が成り立つ。

**定理 4.** 三角形の花紋折りに対する展開図の三角形とそのパターンの三角形は相似であり、相似比は  $1 : 2 \sin \alpha$  である。また、展開図の三角形からパターンの三角形への回転角は  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  である。

定理 4 の証明は付録 D に示す。

### 3.4 花紋スマッキングの制作

3.3 節の手順で生成したパターンに基づいて布を縫い合わせて制作した花紋スマッキングの例を図 12 に示す。本稿では任意の多角形に対する擬花紋折りを扱っているわけではないが、図 12 では三角形に対して 3.3.2 節で述べた手順で生成したパターンと対応するスマッキングも示している。

すべてのスポークの交点が一点で交わる伝統花紋スマッキングと多角形の花紋スマッキングでは、提案法で生成したパターンにおける多角形の頂点をすべて一度にすくい縫い留めて制作するため、図 12 に示すように、布の裏面ではパターンの頂点が一点に集められるとともに、布の表面にはパターンの多角形に相似な図形が模様として現れる。

他方、スポークの角度に対する制約を緩和した擬花紋折りスマッキングのパターンは展開図における多角形の頂点数と同じ本数の線分から構成される。このため、それぞれの線分の両端の 2 点を縫い留めて制作することにより、図 12 に示すように布の裏面には展開図の多角形と同じ頂点数の多角形が現れるとともに、表面にも同様な模様が現れる。

## 4 花紋スマッキングの組み合わせのデザイン

### 4.1 スポークの共有に基づく組み合わせ

3 節の手法で生成したパターンに基づいて花紋スマッキングを造形すると、図 12 に示すように、布の表面には中央の多角形から外側にむけて巾が一定のプリーツが形成される。花紋スマッキングを組み合わせる模様を造形する場合にはそれぞれの花紋スマッキングに対する展開図を同じ平面上に配置してパターンを生成することになるが、個別に配置しただけではプリーツ同士が捻れたりしわがよってしまったり、布の表面に綺麗な模様を造形できないことがある。

たとえば図 13 上のように 2 つの花紋スマッキングを配置した展開図から生成したパターンに従ってスマッキングを造形すると、布の表面にしわがよってしまう (図 13 下での紫の破線で囲んだ箇所)。これは、図 13 上に示す展開図においてスポークが交差してしまっているためと考えられる。

他方、図 14 上のように、互いのスポークを共有する \*5

\*5 複数の花紋スマッキングの展開図を配置した際にスポークを共有するためには、折り線山谷ラベルが同じであり、また折り

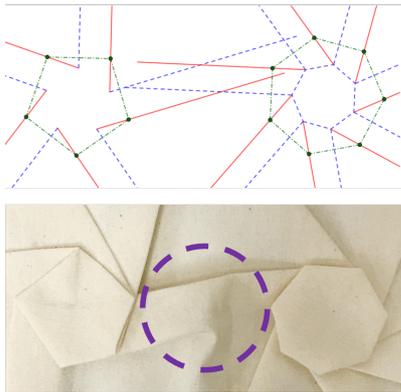


図 13 プリーツのしわの例 (上:展開図, 下:布の表面)

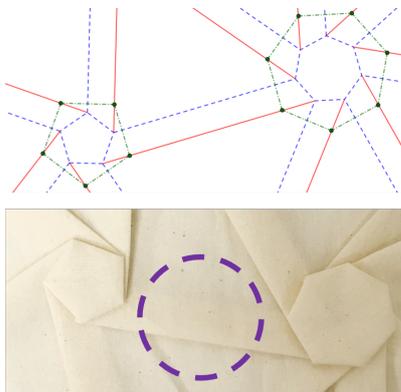


図 14 プリーツのしわの例 (上:展開図, 下:布の表面)

ように花紋スマッキングの展開図を配置してからパターンを生成して造形した場合には、布の表面にしわがよることなく平坦な模様を造形できる (図 14 下参照)。このように、花紋スマッキングを組み合わせて綺麗に平坦な模様を造形するためには、互いのスポークが共有されるように花紋折りの展開図を配置する必要がある。

#### 4.2 三角形の花紋スマッキングの活用

平坦折りの展開図において折り線はまっすぐな線分 (あるいは半直線) として表現されるため<sup>\*6</sup>、スポークを共有するように花紋スマッキングの展開図を組み合わせる際、以下では共有されるスポークにより多角形の領域が構成される場合を考える。たとえば図 15 では 4 つの花紋スマッキングの展開図 (正七角形, 2 つの正方形, 正三角形) を組み合わせることで中央の四角形の領域がつけられている。

線間の距離が等しい必要がある。

<sup>\*6</sup> 立体折りの場合には曲線の折り線も存在する場合がある [8] が、本稿では扱わない。

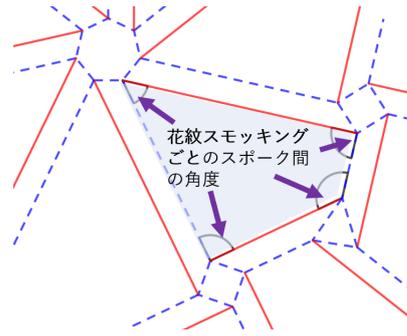


図 15 スポークの共有から構成される多角形の例

ここで、花紋スマッキングの組み合わせに対する複雑さの指標として、スポークの共有を通じて構成する多角形の領域で用いられる花紋スマッキングの個数<sup>\*7</sup>に着目する。このとき、以下が成り立つ。

**定理 5.** スポークの共有を通じて多角形の領域を構成するように花紋スマッキングの展開図を組み合わせる場合、花紋スマッキングの個数は偶数である。

定理 5 の証明は付録 E に示す。定理 5 より、整数  $p \geq 2$  に対して花紋スマッキングの個数を  $2p$  とすると、多角形の領域を構成する花紋スマッキングにおけるスポークの角度の和は  $2(p-1)\pi$ <sup>\*8</sup> となる必要がある。

展開図の多角形が正多角形に限定される伝統花紋折りや擬花紋折りにおいては、正多角形の頂点数  $n$  に応じて内角は一意に定まる。このため、一頂点平坦折りの性質 [9] から、それぞれの花紋スマッキングにおけるスポークの角度も頂点数に応じて  $\frac{2}{n}\pi$  と一意に定まることになる。よって、4.1 節で述べたスポークの共有に基づいて花紋スマッキングの組み合わせをデザインする際には、伝統花紋スマッキングや擬花紋スマッキングに限定すると離散的な組み合わせ問題<sup>\*9</sup>をまず解く必要がある。整数計画法などの組み合わせ問題に対するソルバーなどを利用した場合でも、実行可能解を得るために多くの計算が必要となり、また、可能な組み合わせが限られてしまうという課題がある。

上記の課題を解決するために、定理 3 で示した、三角形の形状に応じてスポークの角度を自在に設計できる

<sup>\*7</sup> 図 15 では 4 個の花紋スマッキング。

<sup>\*8</sup> 領域を構成する頂点数  $2p$  の多角形における内角の和から。

<sup>\*9</sup> 花紋スマッキングの多角形の頂点数はそれぞれ整数であり、組み合わせる個数も整数であるため、スポークの角度の和という制約のもとでの組み合わせ問題となる。

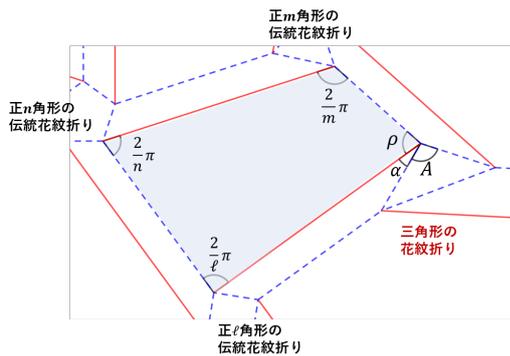


図 16 3 個の伝統花紋スモッキングと 1 個の三角形の花紋スモッキングの組み合わせ

という特徴を活用して、本稿では三角形の花紋スモッキングを活用して花紋スモッキングの組み合わせをデザインすることを提案する。以下では、花紋スモッキングの組み合わせとして最も単純な 4 個の場合を考えることとし、さらに、そのうちの 3 個は（頂点数は任意の）伝統花紋スモッキングを用いるアプローチを提案する（図 16 参照）。このとき、以下が成り立つ。

**定理 6.** 正  $n$  角形, 正  $m$  角形, 正  $l$  角形の伝統花紋スモッキングと三角形の花紋スモッキングの展開図を、スポークの共有を通じて多角形の領域を構成するように組み合わせるとする（図 16 参照）。このとき、三角形の花紋折りの展開図において、頂角  $A$  は  $A = (\frac{2}{n} + \frac{2}{m} + \frac{2}{l} - 1)\pi$  となり、スポークの角度  $\alpha$  は  $\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos A}} \sin A)$  となる。

定理 6 の証明は付録 付録 F に示す。

スポークを共有するという性質から、正  $n$  角形, 正  $m$  角形, 正  $l$  角形のスポークの中（対をなす折り線間の距離）はすべて同じである必要がある。1 つの伝統花紋スモッキングに対する展開図で正多角形の大きさ（1 辺の長さ）を定めると、そのスポークの中は正多角形の大きさに応じて定まるため、スポークの共有を通じて他の 2 つの伝統花紋スモッキングの大きさも一意に定まることとなる。さらに、定理 6 で定まる頂角  $A$  とスポークの角度  $\alpha$  に基づき、共有するスポークの中から、定理 3 での頂角  $A$  に接する辺  $b, c$  の長さも一意に定まることになる。このため、定理 6 を用いることにより、伝統スモッキングにおける頂点数をそれぞれ変更しても、多角形の領域における内角の和の制約を満たすために必要な三角形の形状とスポークの角度を一意に定めることができる

ため、花紋スモッキングの組み合わせをデザインできることになる\*10。

#### 4.3 花紋スモッキングを組み合わせたデザイン

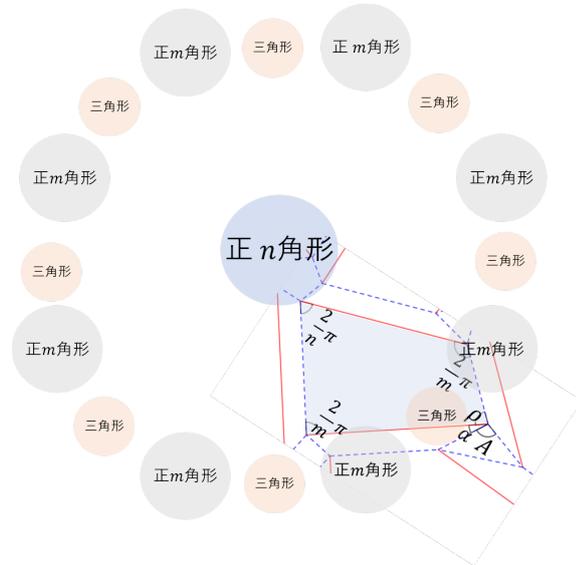


図 17 円状に配置したデザイン例

4.2 節で提案したアプローチの例として、円を描くように花紋スモッキングを組み合わせたデザインを図 17 に示す。定理 6 では一般性を保証するために伝統花紋スモッキングの頂点数はそれぞれ任意としたが、図 17 では正  $n$  角形を中心に 4 個の花紋スモッキングの組み合わせを回転して繰り返し配置できるよう、定理 6 における頂点数で  $m = l$  としている。

上記のデザインの枠組みに対し、任意の頂点数  $n, m$  に対して、花紋スモッキングに対する展開図の作成とパターンを作成を幾何学ソフトウェア GeoGebra [12] を用いて実装した。実装したコードでは、頂点数  $n, m$  の値に加えて、伝統花紋スモッキングの大きさと花紋スモッキング間の距離も自在に設定できるが、一例として、頂点数  $n = 9, m = 4$  とした場合の展開図と生成されるパターンを図 18 に示す\*11。また、生成したパターンに基づいて制作したスモッキングの例を図 19, 図 20, 図 21, 図 22 に示す。

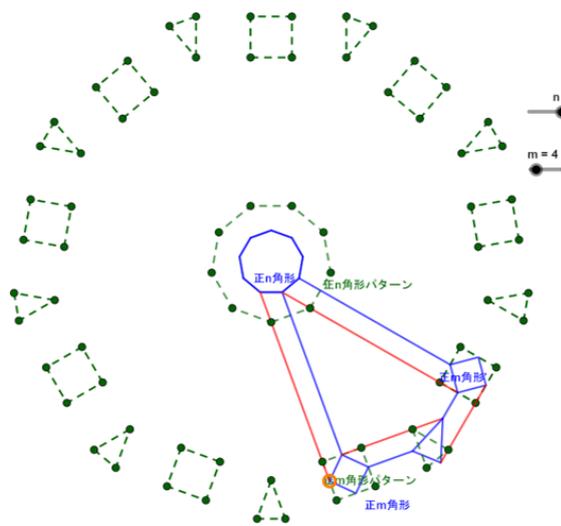


図 18 図 17 に対する花紋スモッキングのパターンの例

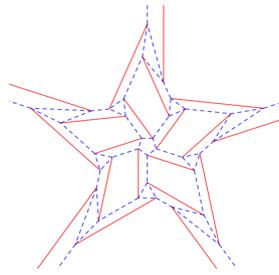


図 23 被服制作のためにデザインした展開図

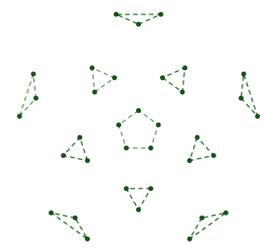


図 24 図 23 から生成したパターン



図 19  $n = 4, m = 6$  の場合



図 20  $n = 5, m = 3$  の場合



図 21  $n = 6, m = 5$  の場合



図 22  $n = 8, m = 4$  の場合



図 25 図 24 に基づいて制作した花紋スモッキング



図 26 図 25 の花紋スモッキングを施した被服

#### 4.4 花紋スモッキングを装飾した被服

本稿のアプローチでデザインした花紋スモッキングを装飾に取り入れた被服の例として、図 18 に示したコー

\*10 角  $A$  が正であることを保証するために、頂点数  $n, m, \ell$  は  $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} + \frac{2}{\ell} > 1$  を満たす必要がある。

\*11 見やすくなるよう、図 18 では展開図における多角形の領域は 1 つのみ示している。

ドで頂点数を  $n = 5, m = 3$  として生成したパターンに基づいてスモッキングを制作し、それを装飾として用いるトップスを制作した。デザインした展開図 (図 23) と、展開図から生成したパターン (図 24) を示す。また、生成したパターンに基づいて制作した花紋スモッキング (図 25) と、花紋スモッキングを装飾に用いて制作したトップス (図 26) を示す。なお、トップスを制作時には前身頃を 2 つに分けてスモッキングを施した布を用いた [13]。花紋スモッキングを施すことにより、装飾がないトップスに比べて華やかであり、個性に富んだ被服を制作することができた。

#### 5 関連研究

多角形と、それをねじるようにして折る展開図を周期的に連結する問題は、平織り (Origami Tessellation) と呼ばれる分野で盛んに研究が行われてきた。たとえば、文献 [14] では、1) 多角形のタイリングを生成する、2) タイリングにおける多角形を縮小し、縮小で誘導される多角形も生成する、3) 多角形を回転する、という手順で展開図を生成する方法を提案している。展開図と折った後の形状との関係など [15] や、この手法を実装するソフトウェア [16] も知られている。しかし、造形したい形状の観点からの展開図の折り線への山谷の割り当ては扱

われておらず、1) で生成したタイリングにおける多角形は、折った後に必ずしも表面に現れるとは限らない。また、回転角を変更できるため多彩な展開図を生成できる反面、多くの場合に擬花紋折りに相当するものとなり、展開図から生成したスモッキングのパターンを造形する際には、縫い留める手間は大きいと考えられる。

本稿では、布の表面に造形したい模様をデザインするという観点から、折り線への山谷割り当てが指定された花紋折りの展開図を、山谷の割り当てを保存しながら組み合わせる複雑なデザインに対する展開図を生成することを提案した。展開図を生成する際の山谷割り当てに制約が加わるため難しい問題とはなるが、組み合わせを通じて複雑なデザインを作成した場合にも、それぞれの模様を表面に造形できる。また、4.3 節で示したデザインでは、多角形はすべて花紋スモッキングとして造形できるため、個々の模様を縫い絞りで制作する際の手間は少ないと考えられる。

三角形の花紋折りを実現するスポークの角度  $\alpha$  は、三角形の内角  $A, B, C$  に基づいて  $\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin A \sin B \sin C}{1 + \cos A \cos B \cos C} \right]$  と対称性が高いエレガントな表現もある [11]。本稿では三角形の 2 辺の長さとその間の角度を用いた表現を定理 3 で示したが、この表現から  $0 < \sin \alpha < \sin A$  となり、交点が三角形の内点であることが保証される (付録 C を参照されたい)。また、4.3 節で示したデザインのように二等辺三角形の場合、定理 6 で示した比較的簡潔な表現となる。

## 6 まとめ

布の表面に模様を造形するスモッキングにおける造形操作が布の折り畳みに基づくことに着目し、本稿では花紋折りに基づくスモッキングのパターン作成と組み合わせのデザインを提案した。造形後の形状を維持するために布が重なる箇所を縫い留めるというアプローチの下で、提案法では展開図に表現される多角形の幾何学的変換を通じてパターンを生成する。さらに、プリーツの共有に基づく花紋スモッキングの組み合わせを提案し、三角形の花紋スモッキングを活用して自在に組み合わせるデザインを提案した。

提案法を GeoGebra を用いて実装し、花紋スモッキングを組み合わせてデザインした模様を施した被服の制作を通じて本稿のアプローチを検証した。今後は多角形の擬花紋スモッキングへの拡張や、組み合わせにおけるスケール (長さ) の扱いと活用に取り組む予定である。

## 謝辞

有益なご指摘を賜りました査読者の方々に深く謝意を表します。

## 参考文献

- [1] 浪間幸井. 文化ファッション大系 服飾関連専門講座 8 手芸 文化服装学院編. 文化出版局, 2004.
- [2] 五十嵐悠紀, 五十嵐健夫, 三谷純. あみぐるみのための 3 次元モデリングと製作支援インタフェース. コンピュータソフトウェア, Vol. 26, No. 1, pp. 51–58, 2009.
- [3] 浦正広, 山田雅之, 遠藤守, 宮崎慎也, 安田孝美. パルーンアートの構造解析と難易度評価手法の提案. 芸術科学会論文誌, Vol. 8, No. 4, pp. 143–150, 2009.
- [4] 浦正広, 山田雅之, 遠藤守, 宮崎慎也, 安田孝美. パルーンアートのデザイン支援のための複数本パルーンモデルの構造化と制作手順の自動生成. 芸術科学会論文誌, Vol. 14, No. 5, pp. 238–247, 2015.
- [5] 藤崎千晶, 吉田哲也. 折り紙の数理に基づくスモッキングのデザイン支援. 第 31 回人工知能学会全国大会, 2I1-1, 2017.
- [6] 法橋厚美. Origami tessellation の新しい構成方法について. 修士論文, 奈良女子大学, 2016.
- [7] 松島杏奈. 折り線パターンが花紋折りと同じになる flat で rigid な折り紙. 修士論文, 奈良女子大学, 2016.
- [8] 三谷純. 立体折り紙アート 数理がおりなす美しさの秘密. 日本評論社, 2015.
- [9] トーマス・ハル. ドクターハルの折り紙数学教室. 日本評論社, 2015.
- [10] Clark Kimberling. Encyclopedia of triangle centers. <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> (2019/04/02 確認).
- [11] Robert J. Lang. *Twists, Tilings, and Tessellations*. A K Peters/CRC Press, 2017.
- [12] [https://www.geogebra.org/\(2019/1/17](https://www.geogebra.org/(2019/1/17) 確認).
- [13] atelier an one. 気のきいた いつもの服. 日本ヴォーグ社, 2017.
- [14] Alex Bateman. Computer tools and algorithms for origami tessellation design. In Thomas Hull, editor, *Origami 3: Proceedings of the Third International Meeting of Origami Science, Math-*

ematics, and Education, pp. 121–127. A K Peters/CRC Press, 2002.

[15] Robert J. Lang and Alex Bateman. Every spider web has a simple flat twist tessellation. In Patsy Wang-Iverson, Robert J. Lang, and Mark Yim, editors, *Origami 5: Proceedings of the Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, pp. 455–473. A K Peters/CRC Press, 2011.

[16] Tess: origami tessellation software. <http://www.papermosaics.co.uk/software.html> (2020/4/16 確認).

吉田 哲也



1991 年東京大学工学部航空工学科卒業。1997 年東京大学大学院博士課程修了。工学博士。同年大阪大学大学院基礎工学研究科助手。2001 年大阪大学産業科学研究科助手。2004 年北海道大学

大学院情報科学研究科助教授。2014 年奈良女子大学大学院教授。主に機械学習，データマイニング等に興味を持つ。人工知能学会，情報処理学会，芸術科学会，建築学会会員。

藤崎千晶



2017 年奈良女子大学生活環境学部卒業。2019 年奈良女子大学大学院生活工学共同専攻博士前期課程修了。被服の定式化とデザイン支援に興味を持つ。

付録 A 定理 1 の証明

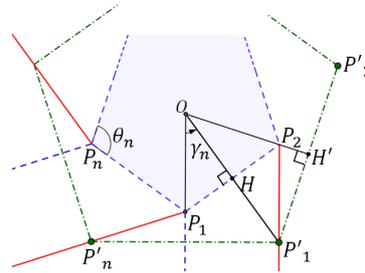


図 27 伝統花紋スモッキングの展開図とパターンとの関係

表 2 図 27 における表記

$O$	展開図の正多角形の中心
$n$	頂点の数
$P_i$	展開図の正多角形における頂点
$P'_i$	パターンにおける頂点
$H$	$O$ から展開図の正多角形の辺への垂線の足
$H'$	$O$ からパターンの辺への垂線の足
$\theta_n$	展開図の正多角形の内角
$\gamma_n$	$\angle P_i O P'_i$ の角度

証明. 図 27 に伝統花紋スモッキングの展開図<sup>\*12</sup> とパターン<sup>\*13</sup> の関係を示す. 図 27 でパターンの点  $P'_1$  は, スポークの山折り線 ( $P_2 P'_1$ ) 上において展開図の正多角形の辺  $P_1 P_2$  で折った際に中心  $O$  と重なる点である. よって, 線分  $P_1 P_2$  は布の折り畳み操作で点  $P'_1$  を中心  $O$  へ写す鏡映変換の役割を果たすため, 線分  $OP'_1$  と線分  $P_1 P_2$  は直交する. このため, 線分  $P_1 P_2$  と線分  $OP'_1$  の交点を  $H$  とすると  $\angle OHP_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $OH = P'_1 H$  となり, 三角形の合同 ( $\triangle OHP_2 \equiv \triangle P'_1 H P_2$ ) が成り立つ. また, 正多角形の対称性より  $OP_1 = OP_2$  であるため, 直角三角形の合同 ( $\triangle OHP_2 \equiv \triangle OHP_1$ ) が成り立つために  $\angle P_1 O H = \angle P_2 O H$  となる.

次に, 半直線  $OP_2$  とパターンの線分  $P'_1 P'_2$  との交点を  $H'$  とする. このとき, 正多角形の対称性から  $OP'_1 =$

\*12 山折り線 (赤の実線) と谷折り線 (青の点線) の平面グラフ.

\*13 パターンの点を緑の一点破線で結んでいる.

$OP'_2$ ,  $\angle P_1OP'_1 = \angle P_2OP'_2$  となるため,  $\angle P'_1OH' = \angle P'_2OH'$  となる. よって,  $H'$  は二等辺三角形  $\triangle OP'_1P'_2$  の頂角  $\angle P'_1OP'_2$  の 2 等分線と辺  $P'_1P'_2$  との交点であるため,  $P'_1H' = P'_2H'$  となり, 線分  $OH'$  と線分  $P'_1P'_2$  は直交する.

$\angle OHP_1 = \angle OH'P'_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle P_1OH = \angle P'_1OH'$  であるため,  $\triangle OP_1H$  と  $\triangle OP'_1H'$  は相似である. また, 対称性から  $\angle OP_1H$  は頂点数  $n$  の正多角形の内角  $\theta_n$  の半分であるため  $\angle OP_1H = \angle OP'_1H = \frac{\theta_n}{2}$  となる. 一般性を失わずに線分  $OP_1$  の長さを 1 とすると  $OH = \sin \frac{\theta_n}{2}$  となり,  $OP'_1 = 2 \sin \frac{\theta_n}{2}$  となる. 上記より, 対称性から展開図の正多角形とパターンの正多角形との相似比は  $1 : 2 \sin \frac{\theta_n}{2}$  である.

また, 図 27 で展開図の頂点  $P_1$  がパターンの頂点  $P'_1$  に写されるとみなすことができる. このため, 回転角  $\gamma_n$  は  $\angle P_1OP'_1 = \frac{\pi}{2} - \angle OP_1H = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2}$  となる. □

付録 B 定理 2 の証明

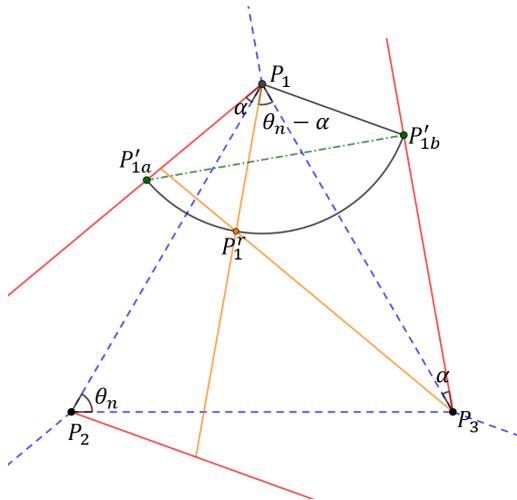


図 28 頂点数  $n = 3$  の場合の展開図とパターン

証明. 頂点数  $n$  の正多角形の内角  $\theta_n$  に対し,

- 1)  $\theta_n < \frac{\pi}{2}$  の場合 ( $n = 3$  の場合)
- 2)  $\theta_n = \frac{\pi}{2}$  の場合 ( $n = 4$  の場合)
- 3)  $\theta_n > \frac{\pi}{2}$  の場合 ( $n \geq 5$  の場合)

に場合分けして示す.

表 3 図 28 における表記

$n$	正多角形の頂点数
$\theta_n$	頂点数 $n$ の正多角形の内角
$P_i$	正多角形における頂点
$P_i^r$	頂点 $P_i$ に接する正多角形の 2 つの辺で, スポークの山折り線をそれぞれを鏡映変換した半直線の交点
$P'_{ia}, P'_{ib}$	$P_i^r$ を同定する際に用いた正多角形の 2 つの辺で $P_i^r$ をそれぞれ鏡映変換した点
$\alpha$	スポークの角度

1)  $\theta_n < \frac{\pi}{2}$  の場合 ( $n = 3$  の場合)

図 28 で  $P'_1$  はスポークの山折り線  $P_1P'_{1a}$ ,  $P_3P'_{1b}$  を  $P_1$  に接する展開図の正多角形の辺でそれぞれ鏡映変換した半直線の交点であるため,  $P_3P'_1 = P_3P'_{1b}$  である. 同様に, 鏡映変換のため  $\angle P_1P_3P'_{1b} = \angle P_1P_3P'_1 = \alpha$  (スポークの角度) となり, 線分  $P_1P_3$  は共通なため,  $\triangle P_1P_3P'_{1b} \equiv \triangle P_1P_3P'_1$  である. よって  $P_1P'_{1b} = P_1P'_1$  となる. 同様に,  $\triangle P_1P_2P'_{1a} \equiv \triangle P_1P_2P'_1$  であるため  $P_1P'_{1a} = P_1P'_1$  となる.

$P_1P'_{1a} = P_1P'_1 = P_1P'_{1b}$  より, 点  $P'_{1a}$ ,  $P'_1$ ,  $P'_{1b}$  は  $P_1$  を中心とする扇形の弧上にあるとみなすことができる. さらに,  $\angle P_2P_1P'_{1a} = \angle P_2P_1P'_1 = \alpha$ ,  $\angle P_3P_1P'_{1b} = \angle P_3P_1P'_1 = \theta_n - \alpha$  より, 扇形  $P_1 - P'_{1a}P'_{1b}$  の中心角  $\angle P'_{1a}P_1P'_{1b}$  は  $2(\theta_n - \alpha) + 2\alpha = 2\theta_n$  となる. よって, 扇形の中心角は任意の  $\alpha$  に対して不変であり, 異なる  $\alpha$  に対する扇形  $P_1 - P'_{1a}P'_{1b}$  は互いに相似である. 伝統花紋スモッキングのパターンに対する扇形は  $\alpha = \frac{\theta_n}{2}$  の場合に対応するため, 擬花紋スモッキングのパターンにおける扇形と, 対応する伝統花紋スモッキングのパターンにおける扇形は相似である. 図 29 に, 展開図の扇形を重畳表示したものを示す.

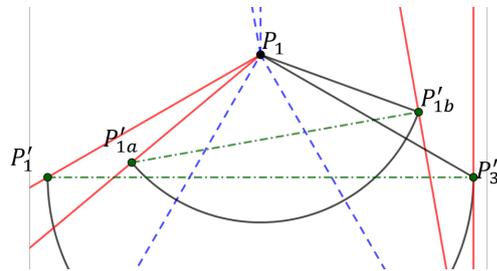


図 29 伝統花紋スモッキングと擬花紋スモッキングのパターンと展開図の重畳表示

図 29 に示すように、伝統花紋スモッキングのパターンの線分  $P_1P'_3$  の長さ、擬花紋スモッキングのパターンの線分  $P'_{1a}P'_{1b}$  の長さの比、つまり  $P_1P'_3 : P'_{1a}P'_{1b}$  は、中心角が等しく相似な扇形における半径の比から  $P_1P'_3 : P_1P'_{1b}$  と等しい。図 28 で  $\triangle P_1P_3P'_{1b}$  に対する正弦定理から  $\frac{P_1P_3}{\sin(\pi - \theta_n)} = \frac{P_1P'_{1b}}{\sin \alpha}$  となり、 $P_1P'_{1b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta_n} P_1P_3$  となる。また、 $P_1P'_3$  は  $\alpha = \frac{\theta_n}{2}$  の場合に対応するため、 $P_1P'_3 = \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \theta_n} P_1P_3$  となる。上記より、 $P_1P'_3 : P_1P'_{1b} = \sin \frac{\theta_n}{2} : \sin \alpha$  となるため、伝統花紋スモッキングにおけるパターンの線分の長さ、擬花紋スモッキングにおけるパターンの線分の長さの比は  $\sin \frac{\theta_n}{2} : \sin \alpha$  となる。

花紋スモッキングのパターンから擬花紋スモッキングのパターンへの回転角は、図 29 における線分  $P_1P'_3$  から線分  $P_1P'_{1b}$  への角度である。回転のために  $\angle P'_3P_1P'_{1b} = \angle P'_1P_1P'_{1a}$  であり、同じ展開図の正多角形（図 28 では正三角形）に対するスポークの角度は伝統花紋折りと擬花紋折りの展開図でそれぞれ  $\frac{\theta_n}{2}$  と  $\alpha$  であるため、その差から回転角は  $\frac{\theta_n}{2} - \alpha$  となる。

2)  $\theta_n = \frac{\pi}{2}$  の場合 ( $n = 4$  の場合)

図 28 における  $\triangle P_1P'_{1a}P'_{1b}$  が縮退して線分となり、扇形  $P_1 - P'_{1a}P'_{1b}$  は半円となる。この場合も、展開図の正多角形における各頂点について半円に対応する扇形同士の関係は上記 1) と同様のため、パターン同士の関係は上記 1) で示した相似比と回転角となる。

3)  $\theta_n > \frac{\pi}{2}$  の場合 ( $n \geq 5$  の場合)

この場合は扇形の中心角は  $\pi$  より大きくなるが、円から扇形を除いた図形を補扇形と呼ぶこととすると、補扇形の中心角は  $\pi$  を超えない。このため、擬花紋スモッキングのパターンと伝統花紋スモッキングのパターンにおける補扇形同士について上記 1) で示した性質が成り立つ。扇形同士の関係は補扇形同士の関係と同じであるため、同様に上記 1) で示した性質が成り立つ。

上記より、任意の頂点数に対し定理 2 が成り立つ。□

### 付録 C 定理 3 の証明

**証明.** 任意の三角形において内角が鋭角であるような頂点が存在する。このため、一般性を失わずに内角が最小の鋭角である頂点を  $A$  とする。また、以下では三角形の頂点における内角を同じ記号で表すこととする。

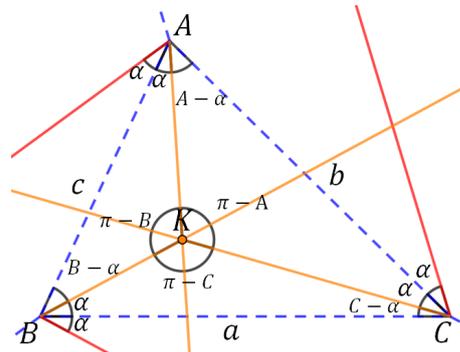


図 30 三角形の花紋折りの展開図

すべてのスポークの山折り線を展開図の三角形の辺でそれぞれ鏡映した際の交点を  $K$  とする（図 30 参照）。鏡映変換の性質から  $\angle ACK = \alpha$  であり、同様に  $\angle CBK = \alpha$  である。  $\angle KAC = A - \alpha$  であるため、 $\triangle KAC$  の内角の和から  $\angle CKA = \pi - A$  となる。同様に、 $\angle BKA = \pi - B$ 、 $\angle CKB = \pi - C$  となる。

図 30 の  $\triangle KBC$  に対する余弦定理から

$$a^2 = KB^2 + KC^2 - 2KB \cdot KC \cos(\pi - C) \quad (1)$$

が成り立つ。さらに、 $\triangle ABC$  に対する正弦定理から  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  が成り立つ。同様に、 $\triangle KBA$  に対する正弦定理から  $\frac{KB}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin(\pi - B)}$  であるため  $KB = \frac{ca}{b \sin A} \sin \alpha$  と表せ、同様に  $KC = \frac{a^2}{c \sin A} \sin \alpha$  と表せる。これらを式 (1) に代入して整理すると

$$a^2 = \sin^2 \alpha \frac{a^2}{\sin^2 A} \left( \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{b} \cos C \right) \quad (2)$$

となる。ここで、

$$e^2 = \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{b} \cos C \quad (3)$$

とおくと、式 (2) は

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{e^2} \sin^2 A \quad (4)$$

と表せる。 $A$  は鋭角であり、また  $0 < \alpha < A$  であるため  $\sin \alpha > 0$ 、 $\sin A > 0$  となる。三角形の辺の長さは正であるため、式 (3) の  $e$  も正となり、

$$\sin \alpha = \frac{1}{e} \sin A \quad (5)$$

と表すことができる。

式 (3) で定義した  $e^2$  について以下が成り立つ.

$$e^2 = \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{b} \cos C$$

$$= \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2}{b} \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 A} \quad (6)$$

$$= \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{c^2} + \frac{2}{b} (b - c \cos A) \quad (7)$$

$$= \left\{ \left( \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) - \cos A \right\}^2 + \sin^2 A \quad (8)$$

$\triangle ABC$  に対する正弦定理を用いて  $\cos C$  を書き換えると式 (6) となり, 式 (6) に余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  を代入して式 (7) となる. さらに, 平方完成して式 (8) となる. 式 (8) を式 (5) に代入して

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left\{ \left( \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) - \cos A \right\}^2 + \sin^2 A}} \sin A \quad (9)$$

となる. 上記より, 三角形に対する花紋折りを実現するスポークの角度  $\alpha$  は, 三角形の長さ  $b, c$ , 内角  $A$  を用いて

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{\left( \frac{c}{b} + \frac{b}{c} - \cos A \right)^2 + \sin^2 A}} \sin A \right) \quad (10)$$

と表すことができる □

なお,  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$  に対する相加平均, 相乗平均の関係から  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq \sqrt{\frac{bc}{cb}} = 1$  であるため  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$  となる.

よって, 式 (3) で  $e^2 = \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \cos A \right)^2 + \sin^2 A > 1$  となり,  $e$  は正であるため  $e > 1$  が保証される. このため, 式 (5) より  $\sin \alpha < \sin A$  となるが, 関数  $\sin$  は  $(0, \pi/2)$  で狭義単調増加であるため  $\alpha < A$  となり, 交点  $K$  は三角形の内点であることが保証される.

#### 付録 D 定理 4 の証明

**証明.** 三角形の花紋スマッキングの展開図とパターンを図 31 に示す. 図 30 と同様, すべてのスポークの山折り線を鏡映変換した際の交点を  $K$  として, 線分  $AB$  と線分  $A'K$  の交点を  $H_A$  とする. 点  $A'$  は点  $K$  を線分  $AB$  で鏡映変換したものであるため  $\triangle AA'H_A \equiv \triangle AKH_A$  となり,  $AA' = AK$  である. 同様に, 線分  $AC$  と線分  $C'K$  の交点を  $H_C$  とするとき,  $\triangle AC'H_C \equiv \triangle AKH_C$  より  $AC' = AK$  である.

$AA' = AK = AC'$  より, 点  $A', K, C'$  は  $A$  を中心とする扇形の弧上にあるとみなせるため, 扇形の中心角と

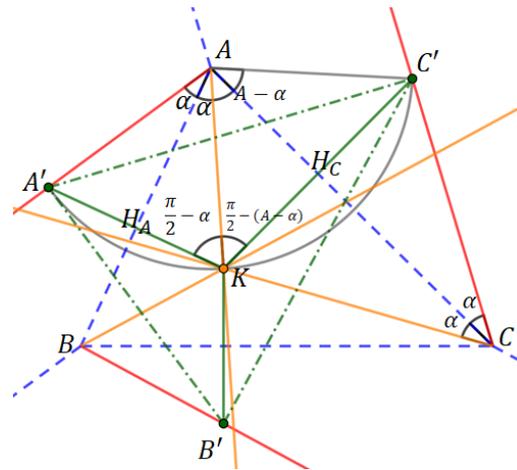


図 31 三角形の花紋スマッキングの展開図とパターン

円周角の関係から  $\angle A'C'K = \frac{1}{2} \angle A'AK$  となる. よって,  $\angle A'AK = 2\alpha$  であるため

$$\angle A'C'K = \alpha = \angle ACK \quad (11)$$

となる.

$\triangle AKC$  の内角から  $\angle AKC = \pi - (\angle KCA + \angle KAC) = \pi - (\alpha + (A - \alpha)) = \pi - A$  となる. また,  $\triangle AA'H_A \equiv \triangle AKH_A$  より, 直角三角形  $\triangle AKH_A$  において  $\angle AKH_A = \frac{\pi}{2} - \alpha$  となる. 同様に,  $\angle AKH_C = \frac{\pi}{2} - (A - \alpha)$  となる. このため,  $\angle A'KC' = \angle AKH_A + \angle AKH_C = \pi - A$  であるため,

$$\angle AKC = \angle A'KC' \quad (12)$$

が成り立つ.

式 (11), 式 (12) から  $\triangle AKC$  と  $\triangle A'KC'$  は相似である. 同様に,  $\triangle BKC$  と  $\triangle B'KC'$ ,  $\triangle BKA$  と  $\triangle B'KA'$  はそれぞれ相似である. このため, 展開図の三角形  $\triangle ABC$  とパターンの三角形  $\triangle A'B'C'$  は相似であり, 相似比は  $AK : A'K = AA' : 2(AA' \sin \alpha) = 1 : 2 \sin \alpha$  である.

$\triangle A'KC'$  は  $\triangle AKC$  を  $K$  の周りに  $\angle AKH_A$  だけ回転し相似変換したものとみなせるため, 展開図の三角形からパターンの三角形への回転角は  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  である. □

#### 付録 E 定理 5 の証明

一般性を失わずに, 本稿では花紋スマッキングの展開図における多角形の辺はすべて谷折りとしている. 展開図の頂点の次数はすべて 4 であり, 2 本の谷折り線は展

開図の多角形の辺に対応するため、前川定理 [9] から各頂点に接続する山折り線は 1 本、谷折り線は 3 本となる。このため、図 5 に示すような多角形の各頂点において、1 本の山折り線と 1 本の谷折り線はそれぞれ隣接する 2 つのスポークにおける辺となる。

図 16 のように花紋スモッキングで共有するスポークにより多角形の領域を構成する場合、領域の頂点はそれぞれ花紋スモッキングの多角形に対応することになり、花紋スモッキングで隣接するスポークが多角形の領域の辺に対応することになる。領域の辺に対する山谷ラベルでの辺彩色を考えると、共有するスポークの辺には同じラベルが割り当てられるため、上記で述べた性質から、領域の辺がなす閉路に沿って山谷のラベルが交互に割り当てられることになる。

組み合わせに用いる花紋スモッキングの個数が奇数であると仮定すると、多角形の辺数と頂点数は等しいため、多角形の領域の辺数も奇数となる。このとき、領域における任意の点から出発する閉路においては、その点から出る辺とその点に戻る辺に同じ山谷ラベルが割り当てられることになり、前川定理に矛盾する。このため、花紋スモッキングの個数は偶数となる。

## 付録 F 定理 6 の証明

**証明.** 図 16 のように花紋スモッキングを組み合わせる場合、一頂点平坦折りに対する性質 [9] から、図 16 に示すようにそれぞれの正多角形におけるスポーク間の角度は  $\pi - \frac{n-2}{n}\pi = \frac{2}{n}\pi$ ,  $\pi - \frac{m-2}{m}\pi = \frac{2}{m}\pi$ ,  $\pi - \frac{\ell-2}{\ell}\pi = \frac{2}{\ell}\pi$  となる。また、四角形の内角の和から、図 16 で三角形の花紋折りに対応する角度を  $\rho$  とすると  $\frac{2}{n}\pi + \frac{2}{m}\pi + \frac{2}{\ell}\pi + \rho = 2\pi$  となる。多角形の花紋折りでも同様に角度に対する制約を満たす必要があるため  $A + \rho = \pi$  となり、 $A = (\frac{2}{n} + \frac{2}{m} + \frac{2}{\ell} - 1)\pi$  となる。

ここで、正  $n$  角形、正  $m$  角形、正  $\ell$  角形の伝統花紋折りを図 16 のように組み合わせる場合、スポークを互いに共有するためその巾は全て等しくなる。このため、図 16 で三角形の花紋折りは必ず二等辺三角形となり、定理 3 での三角形の辺の長さは  $c = b$  となる。このため、 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c} = 2$  となり、スポークの角度  $\alpha$  は  $\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{5-4\cos A}} \sin A)$  となる。  $\square$