

4次元正24胞体のリンゴの皮むき展開図とCG表現

木村優太

海野啓明（正会員）

奥村俊昭

仙台高等専門学校広瀬キャンパス

Apple-Peel Fold-Outs of Four-Dimensional Polytope {3,4,3} and Its CG Image Generation

Yuta KIMURA Keimei KAINO(Member) Toshiaki OKUMURA

National Institute of Technology, Sendai College, Hirose Campus

a1302012@sendai-nct.jp, {kaino, okumura}@sendai-nct.ac.jp

アブストラクト

正多面体のリンゴの皮むき展開図は2回対称のS字形螺旋となる。球面のモデルによればリンゴの皮むき曲線はアルキメデスの螺旋と Lituus の螺旋からなり皮幅に依存しない性質がある。まず、正5,8,16胞体のリンゴの皮むき展開図はそれぞれ正4,6,8面体のリンゴの皮むき展開図から生成されることから、これらの正多胞体の軸測投影図が皮むき展開に便利であることを示す。次に正24胞体の胞の接続関係を示す2種類のモデルを提案し、それらの軸測投影図が胞心図と点心図に対応することから、幾つかのリンゴの皮むき展開図を求める。それらは中心対称性をもつ3次元のS字形螺旋となる。最後に、正24胞体と正120胞体の皮むき展開図を比較して、正600胞体と4次元リンゴの皮むき展開図の特徴について考察する。

Abstract

Regular polyhedron is regarded as an approximate figure of a sphere. Apple-peel fold-out (AF) nets of regular polyhedra have symmetric S-shaped figures and the net of a sphere a symmetric S-shaped spiral half of which consist of Archimedes' spiral and the lituus. There are six regular polytopes in the four-dimensional (4-D) space. AF nets of regular polytopes, regular 4-cube, 16-cell are obtained by using their axonometric projection diagrams. From this fact, two types of AF nets of 24-cell are shown to consist of 3-D spirals on both ends and central nets of S-shaped figure on a 2-D plane derived from their axonometric projection diagrams. These AF nets will give us a good algorithm to obtain AF nets of 120-cell and 600-cell.

1. はじめに

4次元空間は、3次元O-XYZ空間に対して直交する第4のU軸を加えた空間である。4次元空間に存在する基本的な物体として6種類の正多胞体（正5, 8, 16, 24, 120, 600胞体）がある [1]。超立方体（正8胞体）は4次元折り紙として3次元の十字架状の展開する過程が示されている [2]。文献3にはこの過程を理解するための可動式ワイヤフレームモデルが示されている。一般の正多胞体の展開図は論文 [1]や色々なWebページに示されている。これらの展開図と正多面体の展開図との関係や高次元の正多胞体への拡張についての考察は十分でなく、展開の過程のCG表現など興味深い問題がある。

4次元正多胞体の構造は4次元折り紙という観点から見るとよい。普通の折り紙は平面に置かれた紙を3次元空間で折るので3次元折り紙と呼ぶことにすると、4次元折り紙はU=0超平面に置かれた立体をU軸方向に折り曲げるものになる[4,5]。本論では、4次元折り紙の観点から4次元正多胞体をリンゴの皮をむくように展開し、その展開図の特徴をCG画像により表現する。

正多面体はリンゴの皮をむくように展開できる [6,7]。この展開方法による展開図は一意に決まるため都合がよい。正多面体の皮むき展開図はS字形螺旋に似た形をもつが、正多面体は5種しかないの皮幅を細くできない。そこで、リンゴの皮として球面のモデルを考え、回転軸の周りに皮幅一定の条件で皮をむくと2回対称のS字形螺旋が得られるが、この曲線は皮の幅を細くすると皮幅によらない一定の曲線に近づくので「リンゴの皮むき曲線」と呼ぶ [3]。本論では、4次元正多胞体の皮むき展開図を求め、その性質を調べる。すでに千葉らにより正600胞体を除く5種類の正多胞体のリンゴの皮むき展開図が提案されているので [3]、これらの妥当性も調べる。はじめに、正5, 8, 16胞体の皮むき展開図が正多面体の展開図から生成されることから展開図と軸測投影図との関係を明らかにする。次に、正24胞体の皮むき展開図を求める。正24胞体の中心投影図（シュレーゲル・ダイアグラム[1]）に類似の胞の接続モデルを考え [8]、対応する直投影図を参照しながら幾つかのリンゴの皮むき展開図を求める。最後に、正120, 600胞体の皮むき展開図を求める手法を提案し、4次元リンゴの皮むき曲線について考察する。

2. 4次元正多胞体と4次元折り紙

2.1 4次元空間について

4次元空間とは、3次元O-XYZ空間に対して直交する第4のU軸を加えた空間である。U軸方向からO-XYZ空間を見たとき、3次元空間との類似性からこのO-XYZ空間を超平面と呼ぶ。図1(a)の点線で囲まれた部分はZ=0平面を表すように、図1(b)の点線の部分はU=0超平面を表す。例えば、机の上に水平に置かれた立体の見取り図をU=0超平面と見なし、鉛直上方をU軸と見なすと分かりやすい。

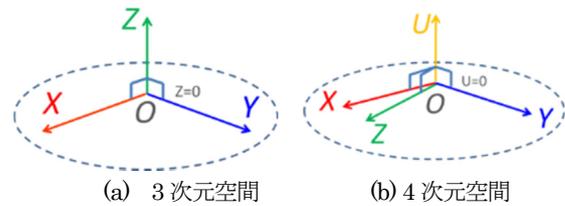


図1. 3次元空間と4次元空間の類似性

2.2 4次元正多胞体について

正多面体は合同な正p角形が各頂点のまわりにq個ずつ集まる多面体であり、シュレーフリの記号では{p,q}と表される。正多面体は全部で5種類あり、正4, 6, 8, 12, 20面体はそれぞれ{3,3}, {4,3}, {3,4}, {5,3}, {3,5}と表される [9]。4次元正多胞体は合同な正多面体（胞と呼ぶ）が各稜のまわりにr個ずつ集まるものであり、シュレーフリの記号では{p,q,r}と表される。正多面体の2面角の大きさをδとすると、正多胞体が存在条件は $r\delta < 2\pi$ となる。4次元正多胞体は全部で6種類あり、正5, 8, 16, 24, 120, 600胞体はそれぞれ{3,3,3}, {4,3,3}, {3,3,4}, {3,4,3}, {5,3,3}, {3,3,5}と表される [10]。5次元以上の正多胞体は標準正多面体族と呼ばれる3種類しかなく、4次元が最も種類が多いことは興味深い [1]。

正多面体の表現として見取り図、展開図、シュレーゲル・ダイアグラムなどがある[9]。正多胞体も同様な図が得られている [11]。図2に正多胞体の中心投影図を示す [1]。この図は多胞体をU=0超平面上にU軸上方（超上）から置き、U軸下方（超下）の間近の視点から見た図と見なせる。超平面上の胞の内部に他の全ての胞が重ならずに描かれている。中心投影図の外形は、胞心図の場合は中心にある胞の形と同じになり、点心図の場合は正多面体の形となる。図2の正600胞体の場合、外形から中央に正4面体の作る正20面体があることが分かるので、点心図である。それ以外の場合は胞心図である。

見取り図を図3に示すが、これらはvZomeにより製作されている [12]。正8胞体は立方体8個からなるが、図3(a)のように手前（U=0超平面上）の青い立方体を黄色い辺で示す軸（U軸）に沿って上方向（超上方向）に移動したものと見なせる。これを図2の中心投影図で表すと、図3(a)中の右上の立方体はU軸上でより遠方にあるから小さく見えるので、左下の立方体の中央部に位置するように描かれる。

正16胞体は16個の正4面体からなる。図3(b)では、中央に青、黄、赤の辺からなる正8面体があり、それらの頂点から青と赤の辺が出てそれぞれ上下の2頂点で会するので、それぞれ正8面体を底面とする2個の超角錐を合わせたものとなる。

正24胞体は24個の正8面体（胞）からなる。図3(c)では一番上（U=1超平面）に青い3角形2枚からなる扁平な胞があり、その胞の一つの面を共有する胞が8個その下にあるが、それらの下方の側面は図の中央の層（U=0超平面）の緑の辺を持つ3角形である。中央の層（超平面）には緑の辺をもつ扁平な立方8面体がある。その側面の8枚の3角形は上の胞と共有し、6枚の正方形は中央の層にある6個の胞の対称面となる。

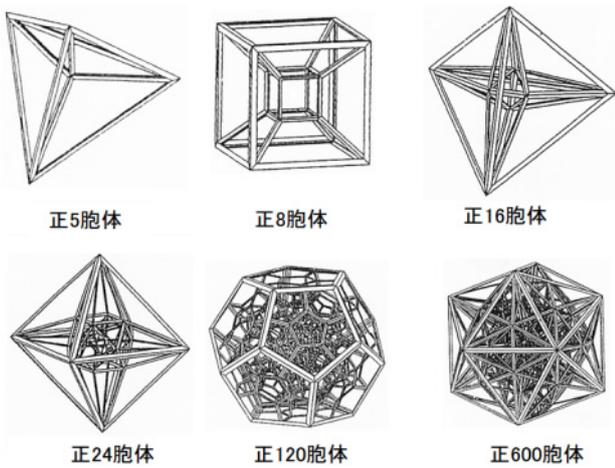
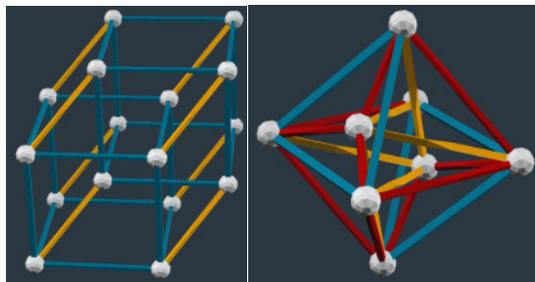
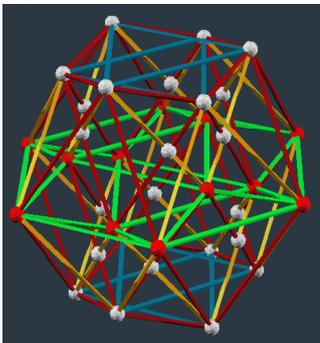


図2. 正多胞体の中心投影図[1]



(a)正8胞体 (b)正16胞体



(c)正24胞体

図3. 正8, 16, 24胞体の見取り図

シュレーゲル・ダイアグラムでは、正多胞体は中心のまわりに胞がたまねぎの皮のように配置されているので、多胞体の超上と超下の所（4次元球の北極と南極）は図の中心と最外殻に対応する。正多胞体の頂点座標を使い [8,13], 胞の中心を求め、それらを縦軸がU軸の平面にプロットすると、図4のように中心は何枚かの層（超平面）の上に分布する [3]。正多胞体の胞の中心はある3-球面（4次元球の表面）上にあるが、その断面は2-球面であるから層上の胞もこの球面上にある。正120, 600胞体のシュレーゲル・ダイアグラムは内部がよく見えないので、これに代わる図として4次元正多胞体の3次元空間への軸測投影図とその設計図がある [1,14,15]。この図は3-球面を赤道面の球に沿って切り離したときの一方向の球体に対応する [16,17]。

[16].

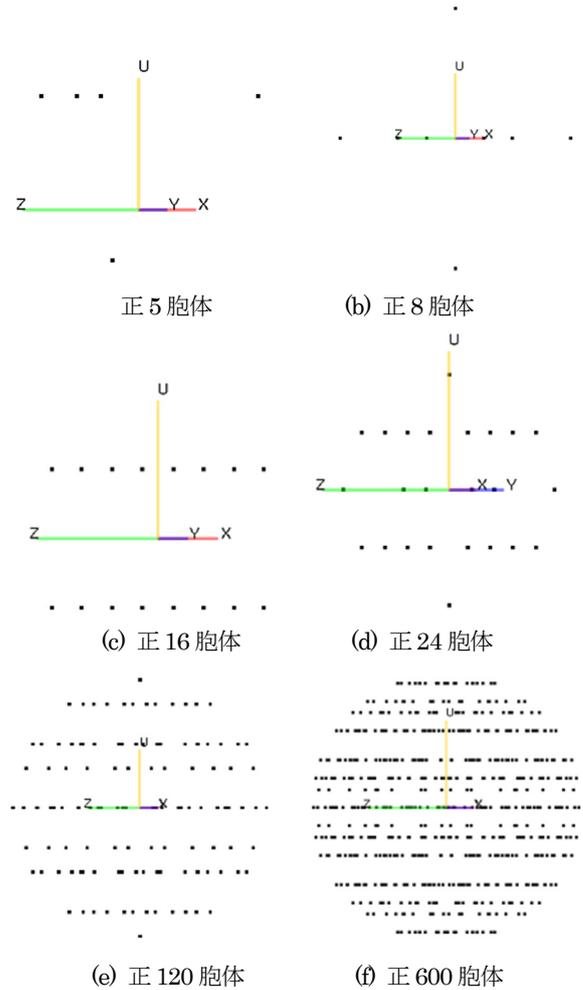


図4. 4次元正多胞体の胞の中心座標のプロット図[3]

正多面体はリングの皮をむくように展開できる [6]。一般に、正多胞体の展開図は組合せの問題と関係して多様であるが、リングの皮むき展開はほぼ一意であり対称性がある [3]。また、4次元正多胞体の皮むき展開図は多胞体の全ての胞をたどり超上（北極）から超下（南極）までの一続きの曲線であるため、4次元多胞体についてよく理解することができる。正多面体の面数が増えていくと球に近づくように、より胞数の多い正多胞体の皮むき展開図は3-球面の理解に役立つ。

2.3 4次元折り紙と正多胞体の展開図の表現

4次元正多胞体は正多角形のように4次元の箱と見なせる。このとき隣接する胞が共有する面を折り面として物体を折ることになるので、4次元折り紙の性質を使う。普通の折り紙は、紙を机の上に置き、折り線の一方の部分を机の鉛直方向に折り曲げ180°に折ると他方の部分に重なる。この時、折り線に対して一方を鏡映変換したと見なせる。同様に、4次元折り紙では、立体の折り紙をU=0超平面上に置き、折り面の一方の部分をU軸上方に折り曲げ、さらに折って他方に重ねれば、一方を折り面に関して鏡映変換したと見なせる [4,18]。図5に隣り

合う 2 個の立方体の一方を折る過程を示す。共有する面が折り面となる。図 6 に示す超立方体の展開は、図 7 のように竹ひごによるモデルで表現できる [3]。机の上を $U=0$ 超平面と見なせば、机の鉛直方向が U 軸上方となる。超立方体の竹ひごモデルを机の上に置いて展開するとき、上方からの光をあてた時に机に映った影が、私たちに見えるものになる [2]。

他の正多胞体の展開図も同様にできるが、展開図と 4次元物体の CG 表現が必要になる [5]。高次元 CG 表現法については文献 19 に研究されている。正多胞体の展開図はこれまでに色々示されているが [1]、本論ではリングの皮むき展開図を考える。正 5, 8, 16 胞体の皮むき展開図を正多面体の展開図と比較して考察する。文献 3 には正 24 胞体と正 120 胞体の展開図が提案されているので、3 章ではこの正 24 胞体の展開図を再検討して妥当な展開図を求め、正 120, 600 胞体の皮むき展開図の生成についてのアルゴリズムを提案する。

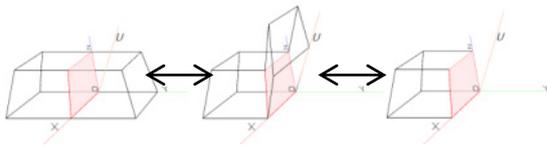


図 5. 隣り合う 2 個の立方体の折りたたみ

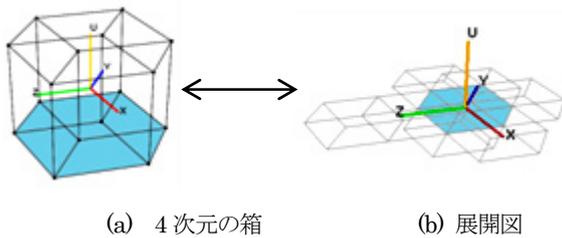


図 6. 4次元折り紙による超立方体の展開表現[3]

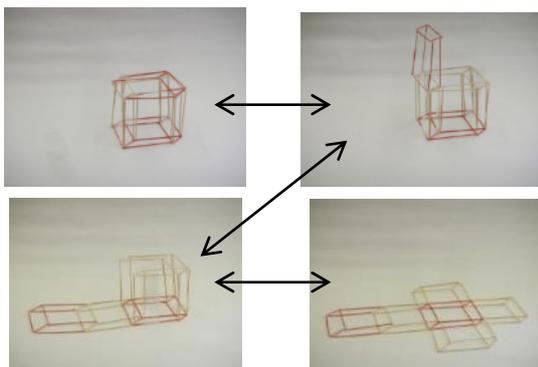


図 7. 竹ひごモデルによる超立方体の展開表現[3]

3. リングの皮むき展開図

3.1 リングの皮むき展開について

リングの皮を軸の周りに一定の幅でむき平面に広げると図 8 のように中心対称の S 字形螺旋が得られる。この展開をリングの皮むき展開または単に皮むき展開と呼ぶことにする。



図 8. リングの皮むき展開図

図 9 は正多面体のリングの皮むき展開図である [6]。ただし、正 12 面体皮むき展開図 1 は、玩具「皮むき多面体」で採用されたものであるが [7]、中央部がジグザグ状で太くなるので、立方体や正 8 面体の皮むき展開図に近い。これらの展開図は 2 回対称性を持つ。また、展開図の中央部は直線状である。それは、例えば立方体は中央部に正 4 角柱があり、20 面体は正 5 角反柱があるためである。正 12 面体展開図 2 と正 20 面体展開図は S 字形螺旋の特徴を示すので、リングの皮むき展開図により近い。正多面体のリングの皮むき展開図の定義としては、まず回転軸とむき方（回転方向）を定め、この軸の周りで皮幅を一定にしてむいた図であるとすればよい。展開図は合同の正多角形からなる帯になるのでほぼ皮幅一定と見なせる。

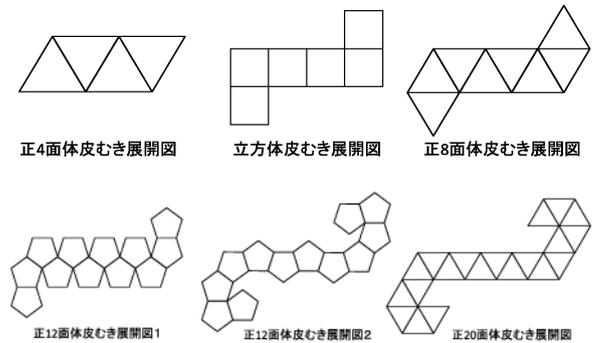
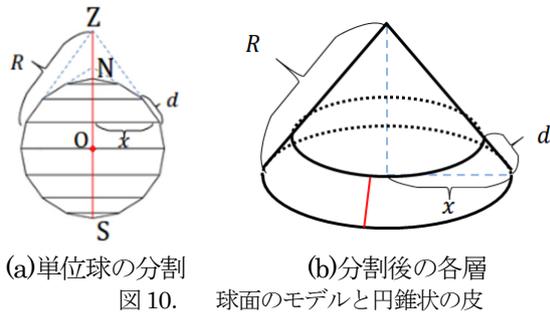


図 9. 正多面体の皮むき展開図

リングの皮むき展開とその曲線は球面のモデルにより調べることができる [3]。図 10(a) のように単位球を考え、その Z 軸を回転軸として北極 N と南極 S を定める。 N から S までの緯度を $2N$ 等分し、緯線に沿って球面を切ると、幅 $d = \pi/2N$ をもつ $2N$ 本の皮ができる。次に N から S を結ぶ赤い経線で切り、それぞれの皮を平らに展開した後で皮の頂点を互いに接続する。このとき皮の両端の赤い経線の部分を図 11 のように直線状に接続する。分割後の各層は、図 10(a) の点線で示した母線の長さ R で半径 x の円を底面とする円錐の裾の帯状の部分とみなすことができる。図 10(b) のように赤線で切り平らに展開すると、半径 R の円周の長さ $2\pi x$ の円弧となる。

図 11 に分割数 $2N = 8$ の場合の皮むき展開図を示す。ただし、北半球と南半球の展開図は対称なので、北半球の部分だけ示す。図 11 のように、北極 N から対称中心 O までの長さを r_0 とし、

螺旋の動径 r と偏角 θ を定めると、数値計算の結果により螺旋の特徴長さは $r_0 = 2.5\sqrt{N}$ となる [3]. 分割数 N が大きいき、螺旋の長さを r_0 で規格化して表すと図 12 のように、螺旋は分割数によらず θ 依存性しかもたない曲線に近づく. リンゴの皮の総長が $8N$ であることを考慮するとこの曲線は $r_0/r = (\theta/\theta_0)^{1/2}$ となることが示される. 数値計算によれば $\theta_0 = 18^\circ$ である. この曲線は Lituus と呼ばれる螺旋である [20]. 一方、北極 N 付近は平らであるからその展開図はアルキメデスの螺旋となるが、北極から離れるにつれて Lituus に移行する. 南半球の展開図は皮むきの方向が北半球と逆になるので、対称中心 O でつなげると S 字形螺旋が得られる. これがリンゴの皮むき曲線である.



(a) 単位球の分割 (b) 分割後の各層球面のモデルと円錐状の皮

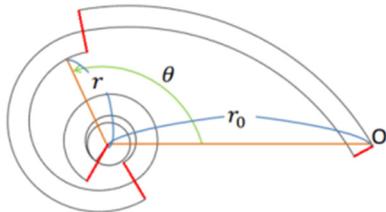


図 11. 皮むき展開図 ($2N=8$) と極座標

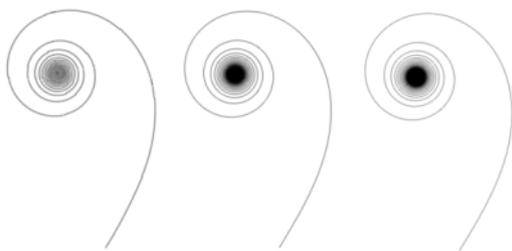


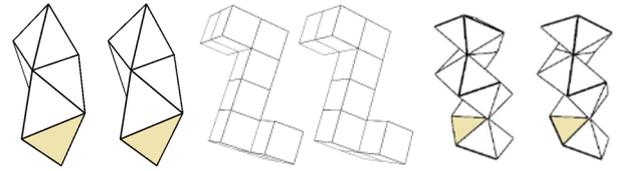
図 12. 規格化された皮むき展開図 (左から $2N=64, 256, 1024$)

正 12 面体と正 20 面体のリンゴの皮むき展開図は分割数でいえば $2N = 3\sim 4$ であるため巻き数は少ないが、中心対称性の S 字形であるのでリンゴの皮むき曲線の特徴を備えている. S 字形螺旋では Clothoid が知られている [21]. 次の章では正多胞体のリンゴの皮むき展開図を調べ、3-球面のリンゴの皮むき曲線について考える.

3.2 4次元標準正多面体の皮むき展開図

正 5 胞体, 正 8 胞体, 正 16 胞体は 4 次元標準正多面体と呼

ばれる. これらの正多胞体の胞の中心座標をプロットすると図 4 のように 2, 3 枚の超平面 (以下では層と呼ぶ) 上に分布する. 図 13 に標準正多面体のリンゴの皮むき展開図を示す. 論文 [3] に提案された皮むき展開図の作成の手順は, (1) U 軸を回転軸に定め, (2) 上の層から順に頂点と胞に番号を割り当て, 次に, (3) 隣り合う胞の対を全て見つけ, (4) 層の中にある胞を皮むき展開して下の層の胞につなげる, と提案されている.



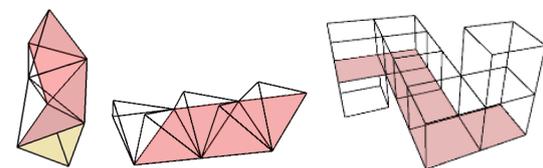
(a) 正 5 胞体 (b) 正 8 胞体 (c) 正 16 胞体

図 13. 正多胞体の皮むき展開図の立体視図

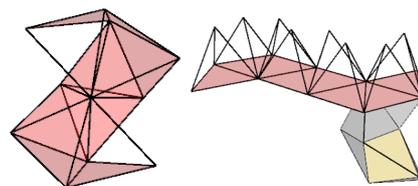
4 次元標準正多面体の皮むき展開図には正多面体の皮むき展開図が含まれている. 図 14 に赤く色付けしてあるところが、正多面体の皮むき展開図である. なお、図 13 と図 14 で対応する胞を黄色で示す. 正 5 胞体では、中心の胞 (黄色) の側面に胞が貼り付いている形である. その側面の 4 個の胞を皮むき展開すると、図 13(a)の展開図が現れる. 正 8 胞体の場合も同様である. 正 16 胞体の場合は、図 3(b)のように上下それぞれの 8 個の胞は超角錐を作り、その底面は正 8 面体となるので、正 8 面体の皮むき展開図が現れる.

正 8 胞体の展開図は中央の平板部分の両端に胞が付く. 図 4(b)では中央の層にある胞は図 2 のように立方体配置をしているので皮むき展開すると図 9 になる. 一方、この層は母線が無限大の超角錐すなわち超角柱となるため、展開すると平板上になる. 皮が厚みを持つのは、半径 r の 3 次元球面の面積は $2\pi^2 r^3$ のように立体の次元を持つからである.

図 2 のシュレーゲル・ダイアグラムでは U 軸上方の層はより下の層に包まれるような胞の配置をしているが、この図は軸測投影図と対応していて、軸測投影図はモデルも作成しやすいことは 2.2 に述べた [14]. これに注意すれば、上述の手順よりもモデルから展開図が直接求められることが分かる.



(a) 正 5 胞体 (b) 正 8 胞体



(c) 正 16 胞体

図 14. 正多胞体の皮むき展開図とそれに含まれる

正多面体の皮むき展開図

4. 正 24 胞体の皮むき展開

4.1 正 24 胞体について

正24胞体は24個の正8面体が各頂点のまわりに6個、各稜のまわりに3個集まって構成されている(付録参照)。正24胞体のゾムツールによるモデルを図15に示す[21,22,23]。例えば、一番上の頂点から出た8本の辺の他の頂点は扁平な立方体を作る。この立方体の各面が頂点に集まる6個の8面体の対称面となる。また、立方体の頂点には3個の正方形が集まるので、稜のまわりに3個の8面体が集まることが分かる。図16に正24胞体に含まれる正8面体を緑の辺で示す。

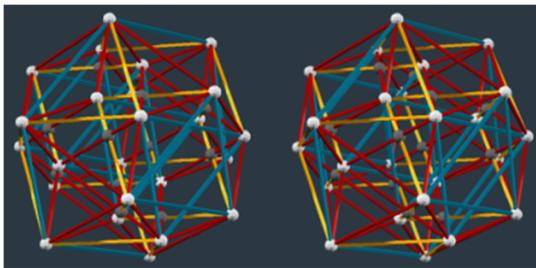


図 15. 正 24 胞体のモデル (立体視)

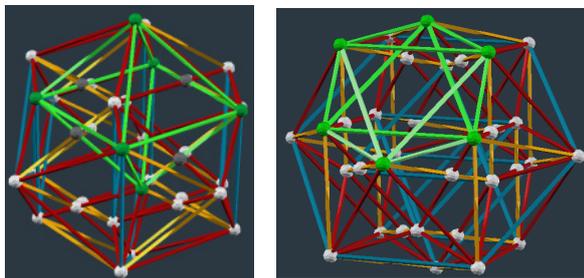
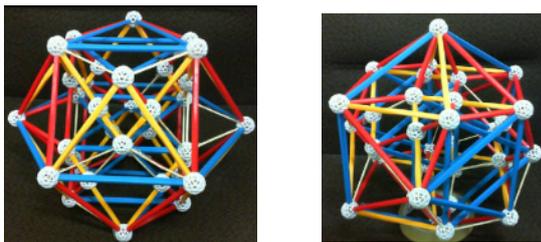
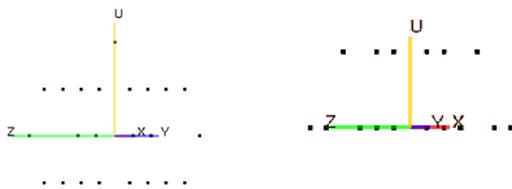


図 16. 正 24 胞体に含まれている正 8 面体の例



(a)5層[1,8,6,8,1]の場合 (b)3層[6,12,6]の場合
図 17. 2通りのU軸に対する正24胞体の胞の分布とゾムツールのモデル

U軸の選び方としては、(a)胞の中心を通る場合と、(b)胞の頂点を通る場合(図15参照)の2通り考えられる[3]。図17に2通りのU軸のとり方に基づいた正24胞体の胞の中心のプロット図と、それに対応した実際のゾムツールのモデルを示す。

図17(a)の場合は5層に分けられ、U軸の上の層から[1,8,6,8,1]個の胞が配置される。図17(b)の場合は3層に分けられ、U軸の上の層から[6,12,6]個の胞が配置される。ここに、(a)と(b)はそれぞれ軸測投影図の胞心図と点心図に対応する[1]。

4.2 5層[1,8,6,8,1]の場合の皮むき展開図

図17(a)において、U軸の上から順に1~5層と呼ぶとき、2,4層にある胞の数よりも3層にある胞の数の方が少ない。3層に分布する6個の胞は、その対称面の正方形が立方8面体を形成しており、8個の正3角形の穴が空いているため、胞同士は互いに頂点だけでつながることに注意しておく。2層(4層)にある胞は8個で、それぞれの胞の中心は立方体の頂点に配置する。そして、2層と4層の胞は対に接続し、その接続面(正3角形)は上の立方8面体の正3角形の穴をふさいでいる。図2の正24胞体のシュレーゲル・ダイアグラムでは外枠の正8面体の中に立方8面体が見える。なお、軸測投影の胞心図では1層の胞を中心にして2層と3層により包まれるが、3層の胞は退化して正方形となり立方8面体の側面に張りつく[14]。1,2層(5,4層)が北極(南極)を中心とする球体を作り、赤道球面が3層に相当する[16,17]。胞同士を少し離して胞の接続関係が分かるような配置モデルを図18に示す。ここでは、中心に1層の胞があり、一番外側の4層の赤い正3角形が5層の胞の面に接続する。この配置モデルより、3層の胞は互いに点で接続するだけであるから皮むきには都合が悪い。皮むき展開するための一つの方法は、2,3,4層をジグザグに行き来することである。この方法は、図9の正12面体の皮むき展開図1と少し似ている。

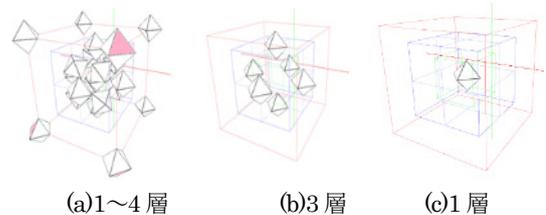
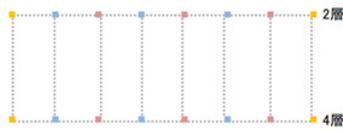


図 18. [1,8,6,8,1]の胞の配置モデル

2~4層にある胞の接続関係のダイアグラムを図19に示す。色付けされた点が胞、破線が接続関係を示す。2,4層にある胞はそれぞれ対になるように接続していて交互に行き来することができるように接続されている。図19(b)では3層にある胞はひとつ隣の2,4層の胞と接続している。このため、2層から3層を通過して4層へ展開していくと、展開図がひとつつながりにならず、2つに分かれる。したがって図19(a)のように2層と4層を交互につなげて、その後展開図が対称となるように3層の胞をつけて展開図を作成したものを図20(a)に示す。

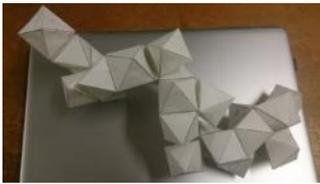


(a) 2層と4層の接続関係

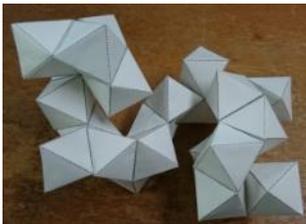


(b) 2~4層の接続関係

図 19. 胞の接続関係のダイアグラム



(a) 2~4層を交互に展開



(b) 1,2層と4,5層を展開

図 20. [1,8,6,8,1]の皮むき展開図

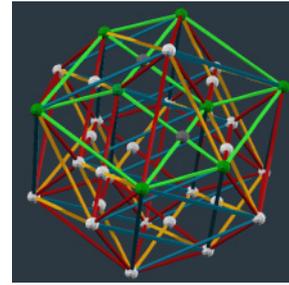
図20(a)の展開図は、2層と4層の胞を交互に展開して3層の胞を加え、両極部に1層と5層の1個の胞が貼り付く形になっており、全体的に平板状となっている様子が分かる。

もう一つの方法は、1層と2層、および4層と5層をそれぞれ皮むき展開した後に3層の胞を対称的に貼り付ける方法である。図20(b)にその展開図を示すが、正8面体の皮むき展開図が現れて、また図20(a)に比べると3次元的なS字形螺旋に近い。ただし中央層をひとつながりにむかないため平板部分が少ない。

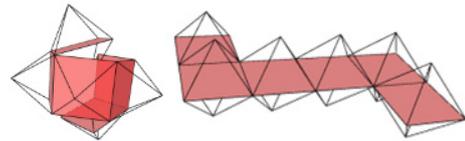
4.3 3層[6,12,6]の場合の皮むき展開図

図 17(b)の場合は、1層から順番に皮むき展開することができる。1層（3層）の6個の正8面体の頂点は1点で会し、これらの胞の対称面（正方形）は立方体を形成する。図 21(a)には1層の超角柱の底面である立方体が緑色の扁平な立方体として表されている。1層（3層）を皮むき展開すると、その対称面（正方形）は図 21(b)に示すように立方体の皮むき展開図となる。

図 21(a)には、1,3層の胞の対称面が作る立方体を上底と下底とする正8胞体がある。その側面の12枚の正方形は中央層(U=0)の胞の対称面となる。この正8胞体をU=0超平面で垂直2等分した断面は菱形12面体を作る。図 22(c)に菱形12面体と胞および対称面の配置を示す。これは正24胞体の軸層投影図(点心図)に対応する。



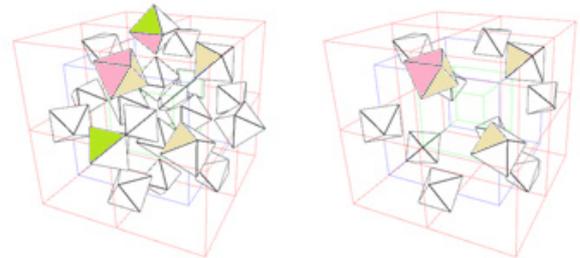
(a) 1層の超角錐（超上に頂点、底面は緑色の立方体）



(b) 1層の展開図と立方体の皮むき展開図（赤い部分）

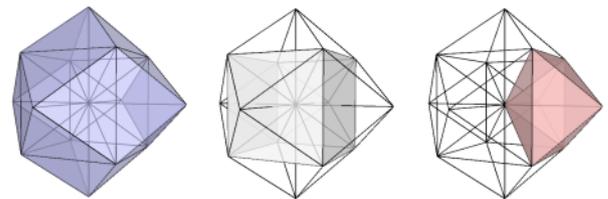
図 21. [6,12,6]のモデルと1層の皮むき展開

[6,12,6]の場合の胞は大中小の3個の立方体上に配置させたモデルを図 22(a)に示す。2層の胞が中の立方体の辺上に配置したモデルを図 22(b)に示す。隣り合う胞が接続する面を緑、赤、黄色で示す。これを図 22(c)の軸測投影図で見ると、1層の胞の正方形の対称面は中央の図に示す立方体を作り、2層の胞の菱形の対称面は左側の図の菱形12面体を作る。



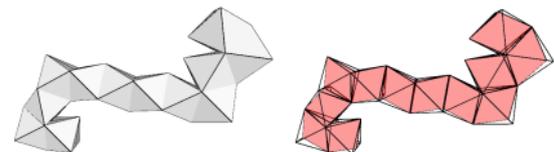
(a) 1~3層

(b) 2層



(c) 菱形12面体（軸測投影図）における胞と対称面

図 22. [6,12,6]の胞の配置モデル

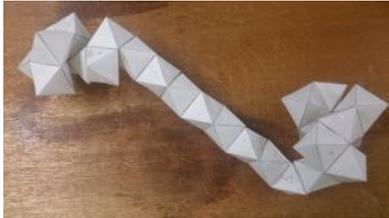


(a) 2層の皮むき展開図 (b) 菱形12面体の皮むき展開図

図 23. 2層と対応する菱形12面体の皮むき展開図（赤色）



(a) 皮むき展開図 (1) (連続する立体視図)



(b) 皮むき展開図 (2)

図 24 [6,12,6] の 2 通りの皮むき展開図

図22の配置モデルをもとに、立方体の面の中点を通る回転軸の周りに2層目の皮むき展開を行い、1, 3層と繋げると、図24(a)のような皮むき展開図 (連続した立体視図) が得られる。2層の皮むき展開は、図23(a)に示すようにS字形螺旋になるが、ここには菱形12面体の皮むき展開図が現れる (図23(b))。また、2層をむくとき、試しに回転軸を立方体の頂点を通るように選ぶと、図24(b)のような皮むき展開図が得られる。図24のどちらも両極部が螺旋形で中心部が平板状であり、3次元のS字形螺旋になる。図24(a)の方が図24(b)よりも対称性がよく、回転軸も一定であるので、正しい皮むき展開図といえる。[1,8,6,8,1]の場合 (図20) と比べても、より良い対称性 (中心対称性) をもつ3次元のS字形螺旋になっている。

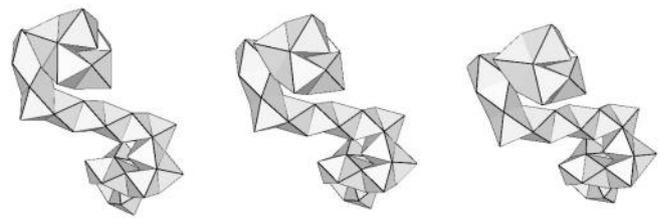
5. 正 120, 600 胞体の皮むき展開図

4次元正多胞体の胞の中心座標のプロット図では、胞はU軸に垂直な数枚の超平面 (層) に分布する。一方、シュレーゲル・ダイアグラムでは、U軸上方にある層の胞は中心に位置し、より下方の層の胞はそれを包むように配置される。また、軸測投影図によれば3-球面 (4次元超球の表面) は赤道球面により2分割された一方の球体として表される [17]。4次元正多胞体のリングの皮むき展開図は曲がった空間を理解するためのよい教材を与える。

正多胞体のリングの皮むき展開図の定義は、適当な回転軸をU軸と定め、U軸上方の層に分布する胞を皮むき展開しながら、より下方の層の胞の皮むき展開図につなげたものである。この場合、皮むき展開図は胞を繋げた縄のようになり、層毎に見ればそれぞれ中心対称の球面上のS字形螺旋になることが正24胞体の皮むき展開図から予想される [3]。

皮むき展開図を求めるアルゴリズムAは次のようにまとめることができる。

(0) U軸として胞の中心を通る場合と頂点を通る場合を考え、



胞の中心座標のプロット図を作り層に順番をつける。

- (1) 正多胞体の頂点と胞に番号を割り当てる。
- (2) 隣り合う胞の対をすべてを見つける。
- (3) 胞同士の接続関係を表す「配置モデル」を作成する。
- (4) 「配置モデル」から1層または数層を使い回転軸の周りに皮むき展開図を求める。このとき中心対称性をもつように注意する。
- (5) 胞同士の接続関係を考慮して上下の層の展開図をつなぐ。

ここで軸測投影図の設計図によりモデルを作成すれば [14]、モデルから直接に(0)~(1)の結果が確認できるので、(3)の配置モデルを軸測投影図のモデルで置き換えればより簡単に確実に皮むき展開図が得られると期待される。なお、軸測投影図は胞心図と点心図の2種類あることに注意する必要がある。

さて、正24胞体の胞心図の場合は、1層の胞が1個となるため、2層の皮むき展開図は球面上にあり、胞 (正多面体) の皮むき展開図が現れる (図20(b)参照)。正120胞体の場合は、胞が正12面体のため図25(c)のように球面上に正12面体の展開図が現れる [3]。一方、正24胞体の点心図の場合は、図21(b)のように立方体の展開図が現れる (図22参照)。

また、図25(a)のように中央層はU=0超平面にあるので、その層の胞は図25(b)の母線Rが無限大の超角錐、すなわち超角柱上にあるから、その展開図は平板状になるので、2回対称性をもつS字形螺旋になる。このことは正8, 24胞体の例で示された。ただし、正16胞体のように2層からなる場合ははっきりしない。以上のことから、4次元正多胞体の軸測投影図 (球体) に対応する皮むき展開図は、球面上の中心対称性を持つS字形螺旋の展開図 (図25(c)) がタマネギの皮状に重なる形を持ち、それぞれ逆向きのものが平板状のS字形螺旋の両端に接続されて、全体として中心対称性をもつ3次元螺旋となると予想される。

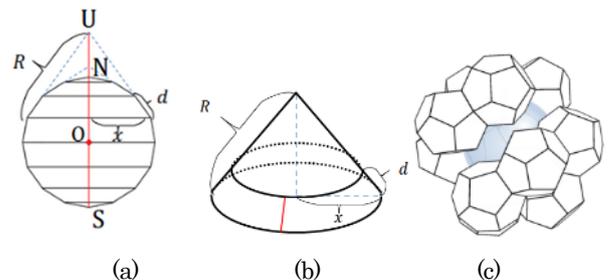


図 25. 3-球面の皮むき展開図の考え方

以上の考察により正120, 600胞体の皮むき展開図が予想され

るので、実際にその展開図を上記のアルゴリズムAと共に軸測投影モデルを利用して求め [22], その展開の過程をアニメーションで表現することが今後の課題となる[23]. さらに図25のような3-球面のリングの皮むき展開図のモデルを設定して4次元リングの皮むき曲線の解析をすることが今後の課題である.

6. むすび

正多面体のリングの皮むき展開図はよく知られている. リングの球面モデルにより, むくための回転軸を定め, 皮幅一定の条件でむくと, リングの皮むき曲線はS字形螺旋となる.

正多胞体のうちで標準正多面体と呼ばれる正5, 8, 16胞体では, そのリングの皮むき展開図は元の正多面体の皮むき展開図から生成されることを示し, それ以外の正多胞体でも極付近でそれが現れることを示した.

正24胞体のリングの皮むき展開について, 胞の中心のプロット図とシュレーゲル・ダイアグラムの考察から正24胞体の2種類の配置モデルを提案し, これを利用して2通りのリングの皮むき展開図を求め, それらが3次元のS字形螺旋となること, および中央層の展開図は平板状になることを示し, 点心図から求めた皮むき展開図(図24(a))が最も中心対称性が良いことを示した.

また, 皮むき展開図を求めるアルゴリズムを検討した. これに従い, 配置モデルと軸測投影図の対応関係を用いれば皮むき展開図がより簡単に確実に求められることを示した. この手順は正120, 600胞体の場合に適用できる.

4次元超球の皮むき曲線は, いくつかの3次元S字螺旋がタマネギの皮上に重なることを示した. 正120, 600胞体の皮むき展開図の形状が明らかにながら, 3-球面の皮むき展開図を求めること, またリングの皮むき展開図の展開過程をCGのアニメーションで表現することも重要な課題であることを述べた. なお, 補足資料として図5, 図21(b), 図22(c)および図24(a)の動画を作成した.

参考文献

[1] 宮崎興二, 石井源久, 山口哲, 高次元図形サイエンス, 京都大学学術出版会, pp. 73-108, 2005.
 [2] K. Miyazaki, FOUR-DIMENSIONAL ORIGAMI, Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami, pp. 51-61, 1994.
 [3] H. Chiba, H. Arai, K. Kaino, Apple-Peel Fold-Out of 4-D Regular Polytopes, Proceedings of NICOGRAPH International, pp. 31-34, 2013.
 [4] T. Kawasaki, On High Dimensional Flat Origamis, Proceedings of the First International Meeting of ORIGAMI SCIENCE and TECHNOLOGY, pp. 131-141, 1989.
 [5] A. Inoue, R. Itoharu, K. Yajima, K. Kaino, CG Image Generation of Four-Dimensional Origami, The Journal of the Society for Art and Science, Vol. 4, No. 4, pp. 151-158, 2005.

[6] 数学教育協議会 銀林浩, 算数・数学なつとく事典, 日本評論社, pp. 226-229, 1994.
 [7] 阿竹研究所, 皮むき多面体, あたけぼねショップ, 2008. <http://www.atakebones.com/>
 [8] 木村, 海野, 奥村, 4次元正24胞体のリングの皮むき展開図とCG表現, Proceedings of NICOGRAPH 2014, pp.17-24, 2014.
 [9] H.S.M.コセクター, 幾何学入門 上, 筑摩書房, pp. 278-297, 2009.
 [10] H.S.M.コセクター, 幾何学入門 下, 筑摩書房, pp. 318-331, 2009.
 [11] ヒルベルト, コーン・フォッセン, 直観幾何学, みすず書房, pp.154-169, 1966.
 [12] Scott Vorthmann, vZome (ヴァーチャル・ゾム), 2014. <http://vzome.com/home/>
 [13] 菅原民雄, 4次元正多胞体 I, II, 2004. <http://www.geocities.jp/sgwr0/poly4dim/poly4d.html>
 [14] 宮崎興二, かたちと空間, 朝倉書店, pp.87-95, 1983; しゃぼんだま建築, 彰国社, pp.70-73, 1985.
 [15] 佐藤郁郎, 中川宏, 多面体木工 (増補版), 科学協力学際センター, pp.93-100, 2011.
 [16] J.R.ウィークス, 曲面と3次元多様体を見る, 現代数学社, pp.133-143, 1996.
 [17] 根上生也, トポロジカル宇宙 [完全版], 日本評論社, pp.45-47, 2007.
 [18] K. Kaino, Four-Dimensional Origami and Folding Regular Tetrahedron, in Statistical and Condensed Matter Physics, Over the Horizon/ S. Fujita, T. Obata and A. Suzuki(editors), Nova Science Publishers, NY, pp. 101-111, 2007.
 [19] 石井源久, 多次元半多胞体のソリッドモデリングに関する研究, 京都大学博士論文, 1999, <<http://fgs.la.coocan.jp/paper/>>
 [20] Eric W. Weisstein, Lituus from Math World – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Lituus.html>
 [21] J.D.Lawrence, A Catalog of Special Plane Curves, Dover Publications, pp.pp.184-200, 1972.
 [22] 石井源久, Zometool green lineと4次元半正多胞体, イメージミッション木鏡社, 2006. <http://imagemission.com/imi/2006/08/07/imageawards>
 [23] 三輪貴信, 酒井幸仁, 橋本周司, 主消点操作による4次元視点制御とその評価, 芸術科学会論文誌, Vol.12, No.4, pp.162-174, 2013.

付録

正24胞体の頂点が半径2の3-球面上にあるとすれば, それらは正8胞体の16個の頂点($\pm 1, \pm 1, \pm 1$), および正16胞体の8個の頂点($\pm 2, 0, 0, 0$), ($0, \pm 2, 0, 0$), ($0, 0, \pm 2, 0$), ($0, 0, 0, \pm 2$)で与えられる. 図17では上方向をU軸とする. 図17(b)ではU軸は中心から頂点($0, 0, 0, 2$)を通る軸である. 図17(a)では, 例えば中心から($1, 1, 0, 0$)の方向をU軸にとればよい.

木村 優太



2013 年仙台高専電子制御工学科卒業. 同年同校情報電子システム工学専攻科進学. 拡張現実による生け花システムの開発と 4 次元物体の CG 表現に興味を持つ.

海野 啓明



1973 年東北大学工学部金属加工工学科卒業. 1979 年東北大学大学院理学研究科物理学第二専攻博士課程修了. 理学博士. 1981 年仙台電波高等専門学校情報工学科助手. 1997 年ニューヨーク州立大学バッファロー校在外研究員. 2009 年仙台高等専門学校情報システム工学科教授. 形の科学と芸術の接点に興味を持つ. 形の科学会, 日本応用数学会, 芸術科学会, 他会員.

奥村 俊昭



2000 年豊橋技術科学大学大学院工学研究科電子・情報システム工学専攻博士後期課程了. 博士 (工学). 2000 年仙台電波高等専門学校電子制御工学科助手. 2004 年同校情報工学科講師, 2006 年同助教授. 2009 年仙台高等専門学校専攻科情報電子システム工学専攻准教授. 文学作品の可視化, 人工衛星画像の解析支援システムに関する研究, 医用画像処理・画像認識に関する研究に従事. 電子情報通信学会, 情報処理学会, 日本医用画像工学会, 他会員.