

## 高密度比を考慮した泡の3次元崩壊シミュレーション

三田直紀 張英夏（正会員） 向井信彦（正会員）

東京都市大学大学院 工学研究科

### 3D Simulation of Bubble Rupture by Considering High Density Ratio

Naoki Mita, Youngha Chang(Member)

and Nobuhiko Mukai(Member)

Graduate School of Engineering, Tokyo City University

{mita, chang, mukai} @ vgl.cs.tcu.ac.jp

#### アブストラクト

本稿では、空気と水の密度比が非常に高い状態(高密度比状態)を考慮することにより、粒子法を用いて泡の崩壊現象を3次元でシミュレーションする手法について報告する。泡を構成する水を非圧縮性流体、泡内部に存在する空気を圧縮性流体として解析し、空気から泡の膜に加えられる内部圧力により膜に穴が開く様子を表現する。膜には厚みがあり、膜粒子の結合により膜には表面張力が働く。粒子法を用いて解析された泡の崩壊は最終的には、マーチングキューブ法を用いてポリゴンが作成され、レイトレーシング法によりレンダリングされる。シミュレーションの結果、水面上に形成された半球状の膜を持つ泡に対して、空気から膜への内部圧力と膜間に働く表面張力との差により膜の一部に穴が開き、穴が円形状に拡大した後、最終的には膜が消滅すると共に水面が隆起する様子を写實的に表現することができた。また、シミュレーション結果を現実の泡の崩壊現象と比較した結果、現実の泡と類似した泡の崩壊を確認した。

#### Abstract

This paper reports a particle-based 3D simulation method of bubble rupture by considering the high ratio of the water density to the air density. We analyze the behavior of water and air as incompressible and compressible fluid, respectively, and express that a hole appears on the film of the bubble by the inner pressure. The film has a constant thickness, and surface tension operates between the film particles. Finally, we extract the fluid surface by using Marching Cubes, and render the surface by ray-tracing method. As a result of the simulation, we could confirm that a hole appears on the film of a bubble by the pressure difference between inner pressure and surface tension for a dome-shaped bubble on the water, and the hole expands having circle shape, and finally the water surface rises after the bubble ruptures. Furthermore, we have confirmed that the bubble behavior in the simulation is similar to the real one by comparing the simulation result and a video of the real one.

## 1. まえがき

近年、波や河川といった流体をリアリティの高い映像としてコンピュータグラフィックス(CG)により表現する研究が行われている。流体が引き起こす現象の一つとして泡に関する研究も盛んに行われているが、多くは泡の浮上に関する研究であり、泡の崩壊に焦点を置いた研究は少ない。大小異なる複数の泡が水中より浮上しながら、泡が傘状に変形するシミュレーション[1]では、泡の崩壊過程を表現していない。また、本来水面上に形成された泡には薄い膜があり、この膜が同心円状に破裂することにより泡は崩壊する。しかしながら、従来における泡に関する研究では、水中から浮上して水面上に形成された泡はランダムに泡が丸ごと消失する表現をしている[2, 3]。泡は水場などで日常的に見られる身近な現象であり、泡の崩壊過程を表現することは、ビールや炭酸水などの飲料水におけるCM映像制作などに活用できる。

このため著者らは、粒子法の一つであるMPS (Moving Particle Semi-implicit)法[4]を用いて、泡の崩壊現象をシミュレーション[5, 6]してきたが、この手法では空気の圧縮性に対する圧力計算が不安定であり、膜には既に穴の開いた状態から泡の崩壊をシミュレーションしていた。これらの問題を解決するために、安定的な圧力計算を行える手法を採用し、また、膜には穴が開いていない状態からのシミュレーションも行った[7]。しかしながら、この手法でも泡崩壊後には膜粒子が残り、シミュレーション上で余分な力が働いていた。

そこで本稿では、泡崩壊後に膜粒子が消滅して水粒子に戻る機構を追加し、また、粒子を球として表現するのではなく、泡の表面を抽出し、レイトレーシング法によってレンダリングすることで、写実的な泡の表現を試みる。また、現実の泡の崩壊との比較を行うことで、本手法の妥当性について報告する。

## 2. 泡の流動解析

### 2.1 泡のモデル

本稿では、泡を構成する水を非圧縮性のニュートン流体として扱うことで3次元シミュレーションを行う。非圧縮性ニュートン流体の支配方程式は、質量保存則を表す連続の式(1)と運動量保存則から得られるナビエ・ストークスの方程式(2)から成る。

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{\rho}\sigma\kappa\delta\mathbf{N} \quad (2)$$

ここで、 $\rho$ ,  $t$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $P$ ,  $\nu$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\delta$ , および $\mathbf{N}$ は、それぞれ密度、時刻、速度、圧力、動粘性係数、重力加速度などの外部加速度、表面張力定数、曲率、表面張力を水面のみに適用するためのデルタ関数、および自由に自由表面における粒子数密度の法線ベクトルであり、式(2)の右辺第1項は圧力項、第2項は粘

性項、第3項は外力項、第4項は表面張力項を示している。

次に、本研究で扱う泡のモデルを図1に示す[4]。まず、水を構成する粒子を粒子数密度に応じて自由表面粒子と水中粒子に分類し、大気と泡を構成する空気に挟まれた自由表面粒子を膜粒子として定義する。また、膜粒子に囲まれた泡の内部には空気粒子が存在する。なお、本研究では計算リソースの関係から、大気中の空気粒子は存在しないものとする。

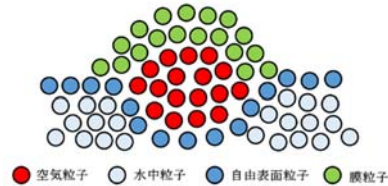


図1: 泡のモデル

なお、自由表面粒子は式(3)を用いて定義される。

$$n_i < \beta n^0 \quad (3)$$

ここで、 $n_i$ , および $n^0$ は粒子 $i$ の密度、および初期粒子数密度であり、 $\beta$ は文献値[4]より0.97を用いる。自由表面粒子には表面張力が働き、この表面張力は式(2)の第4項で計算される。

一方、膜粒子の挙動には泡の内部圧力も影響を及ぼすため、膜の表面張力は通常の自由表面粒子に働く表面張力とは異なる力を考える。泡の膜に働く表面張力は水分子間の結合力に起因するため、本研究では膜粒子間に働く力をバネを用いてモデル化し、膜粒子に働く表面張力を次式(4)で計算する[6]。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} = -\frac{2R\sigma}{n^0} \sum_{j \neq i} \left\{ \omega_{ij} l_{ij} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right\} \quad (4)$$

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{粒子} i \text{ と粒子} j \text{ が結合している場合}) \\ 0 & (\text{上記以外の場合}) \end{cases} \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_j$ ,  $R$ ,  $\sigma$ ,  $n^0$ , および $l_{ij}$ は、粒子 $i$ の位置、粒子 $j$ の位置、泡の半径、表面張力定数、初期粒子数密度、および膜粒子生成時における粒子 $i$ と粒子 $j$ の粒子間距離からの伸びである。膜粒子は影響半径 $r_e$ の0.75倍の距離内に存在する全ての膜粒子ないし水粒子と結合し、粒子間距離が閾値以上になるとバネは切断されるものとする。

次に、泡の内部圧力は、空気の密度と各空気粒子の速度から求められる力を合成することにより計算する。ここで、泡内部からの空気圧力が泡の表面に対して均等にかかると仮定すれば、内部圧力 $P_{in}$ はベルヌーイの定理から次式(6)で求められる[8]。

$$P_{in} = \frac{1}{2} \rho_g \mathbf{u}_g^2 \quad (6)$$

ただし、 $\rho_g$ は泡内部の空気密度、 $\mathbf{u}_g$ は泡内部にある空気粒子の平均速度である。

なお、膜粒子は他の粒子と同様に非圧縮性ニュートン流体の支配方程式である式(1)および(2)を解くが、膜粒子は式(2)における表面張力項の代わりに式(4)のバネモデルを用いる。つまり、膜粒子は伸縮性を持つ非圧縮性流体と考える。

## 2.2 MPS法

本研究では、粒子法の一つであるMPS法を用いて、泡を構成する水粒子と空気粒子の運動を解析する。MPS法において、粒子は影響半径 $r_e$ 内に存在する他の粒子との相互作用によって、各粒子が保持する速度や圧力などの物理量を計算する。しかしながら、本稿では空気粒子に圧縮性を適用するため、粒子と粒子が極端に近付き、泡内部の圧力が非常に高くなることもある。このため、MPS法で通常に用いられる重み関数を用いると、粒子間距離が0に近づくにつれて、重み関数の値は無限大に近づく。このことを回避するため、本研究では式(7)の重み関数 $w$ [9]を用いる。

$$w(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{r_e} - 1\right)^2 & (r \leq r_e) \\ 0 & (r > r_e) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)を用いると粒子間距離 $r$ が0の場合でも重み関数の値 $w(0)$ は1となり、安定的な圧力計算が行える。この結果、従来の重み関数[4]よりも収束性が増すようになった。MPS法における流体の密度は粒子数密度に比例するため、粒子 $i$ の粒子数密度 $n_i$ を式(8)を用いて、粒子 $i$ における重み関数の総和として計算する[3]。

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (8)$$

さらに、MPS法において流体は非圧縮性として扱われるため、粒子数密度一定の条件に基づいて、運動解析を行う必要がある。このため、粒子数密度は常に初期状態における粒子数密度 $n^0$ と一致するように粒子位置を調整する。つまり、 $n^*$ を粒子の仮位置から求められる粒子数密度とすると、粒子数密度の修正量 $n'$ を用いて粒子数密度が初期粒子数密度 $n^0$ と一致するように粒子位置を修正する(式(9))。

$$n^0 = n^* + n' \quad (9)$$

一方、泡の内部に存在する空気粒子は非圧縮性流体ではない。このため、MPS法を適用するためには空気粒子に限定的な圧縮性を適用して、空気の粒子数密度 $n$ を式(10)を用いて求める[3]。

$$n = n^0 + \frac{n^0}{\rho_0 c^2} (P - P_0) \quad (10)$$

ここで、 $\rho_0$ 、 $c$ 、 $P$ 、および $P_0$ は、それぞれ初期状態における空気の密度、音速、空気粒子の圧力、および初期状態における

空気の圧力であり、ここでは $P_0$ を1[atm]とする。

また、式(2)より圧力勾配項は密度の逆数に比例するが、空気と水の密度比はおよそ1対1000と非常に大きい。そのため、同じ圧力勾配項であっても、密度の小さい空気粒子の圧力勾配項による加速度は水の1000倍となり、結果的に空気と水の界面で空気粒子が激しい運動を引き起こし、計算が不安定となるため、空気と水を同時に解析するのは困難である。したがって、本研究ではナビエ・ストークスの方程式(2)における圧力勾配項の計算を空気と水の2段階に分けて行う。

## 3. シミュレーション

本研究では、水面上に直径約20mmの半球状の泡が形成された状態から泡の崩壊をシミュレーションする。シミュレーションで用いる粒子の初期配置を図2、図2の垂直断面図を図3に示す。また、本シミュレーションの流れを図4に示す。

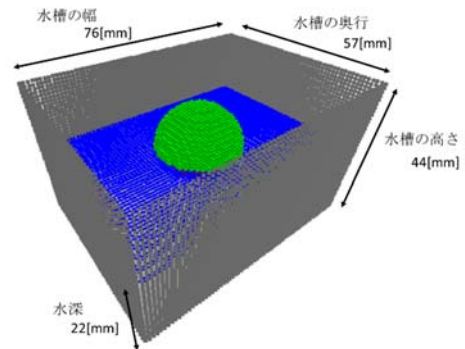


図2: 初期粒子配置

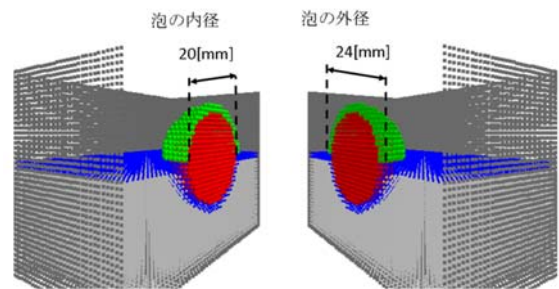


図3: 初期粒子配置(垂直断面図)

まず、シミュレーションで用いる粒子の初期配置を行う。シミュレーションで用いる粒子は136,356個(水粒子72,820、空気粒子4,224、膜粒子1,360、水槽を囲む壁粒子57,952)であり、図2および図3に示すように粒子を球体で表現している。膜粒子は緑色、自由表面粒子は青色、水中粒子は灰色、空気粒子は赤色、壁粒子は濃い灰色にそれぞれ対応している。また、膜粒子と水粒子に囲まれた空気粒子は非圧縮状態の正球体を形成している。

次に、パラメータの初期設定と初期粒子数密度の計算を行う。パラメータの初期値を表1に示す。なお、 $l_0$ は初期粒子間距離である。

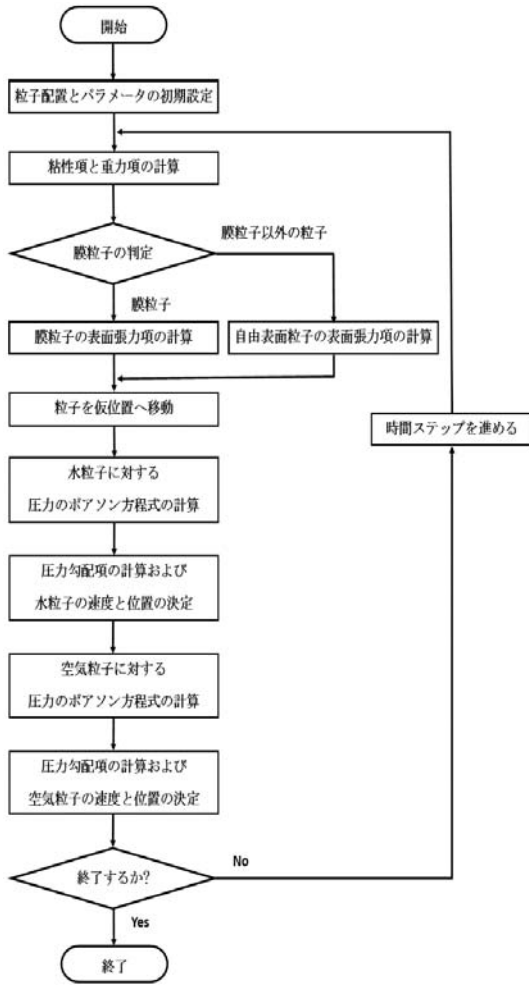


図4: 本シミュレーションの流れ

その後、式(2)における粘性項と外力項を計算し、膜粒子の判定を行う。ここで、膜粒子は泡の崩壊につれて水粒子へと変化する必要がある。このため、膜粒子が水粒子に変化する条件を以下の通り設定する。

- 1) 膜粒子の一定の距離(粒子間距離の3倍)内に空気粒子が全く存在しなくなったとき。
- 2) 膜粒子が水面を表す自由表面粒子(含膜粒子)の平均高さよりも低い位置に存在するとき。

表1: パラメータの初期値

パラメータ	記号	初期値	単位
初期粒子間距離	$l_0$	0.001	m
影響半径	$r_e$	0.0031	m
動粘性係数	$\nu$	0.0015	$m^2/s$
水の表面張力	$\sigma$	0.0727	N/m
空気密度	$\rho_0$	1.25	$kg/m^3$
水密度	$\rho_0'$	1000	$kg/m^3$
音速	$c$	340	m/s

膜粒子の判定後、式(4)より膜粒子の表面張力を、また、式(2)の表面張力項より自由表面粒子の表面張力を計算することで粒子の仮速度を求め、粒子が仮位置へ移動する。さらに、式(2)の

圧力勾配項を計算する。このとき、最初に空気粒子を無視して水粒子のみを対象として圧力のポアソン方程式を解き、水粒子の速度と位置を決定する。ただし、空気と水の界面における水粒子は自由表面とし、自由表面には近傍の空気粒子の圧力を与える。次に、水粒子を壁粒子として固定し、圧力勾配をゼロとする。この条件下で、空気粒子に対する圧力のポアソン方程式を解いて圧力勾配項を計算した後、空気粒子の速度と位置を決定する。このような2段階に分けた圧力勾配項の計算を行うことで、空気と水の界面において空気粒子が激しい運動を引き起こす問題を防ぐことができる。上記過程を時間ステップを進めながらシミュレーション終了まで繰り返す。

本稿の実行環境を表2に示す。なお、シミュレーションに要した時間は1,000ステップ(実時間で0.1[s]に相当)当たり約1時間であった。

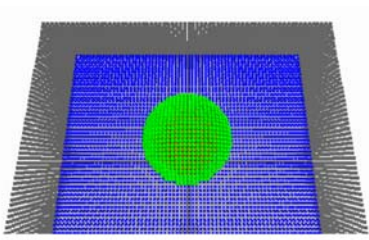
表2: 実行環境

OS	Windows 7 Professional 64bit
CPU	Intel Core i5-4440 3.10GHz
メモリ	4GB
GPU	GeForce GTX670 (メモリ2GB)

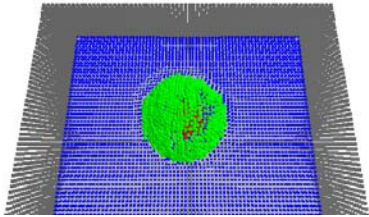
本シミュレーションの結果を図5に示す。図5(a)はシミュレーション開始時の様子であり、膜には穴が開いていない状態である。シミュレーションが始まると泡内部の空気が圧縮されて、内部圧力が高まり、図5(b)のように泡の外形がやや崩れる一方で、膜の右側に寄った頂点付近が薄くなる。その後、図5(c)に示すように膜の頂点付近には穴が開き、膜に開いた穴は捲れるようにして次第に広がり、図5(d)に示すように膜は同心円状に崩壊する。このとき、膜の内部には圧縮された空気粒子がある。泡崩壊後、図5(e)に示すように円形に残った緑色の膜粒子は青色の水粒子となる。また、赤色の空気粒子は空中へと飛び出し、大気中に拡散して、泡は図5(f)に示すように消滅する。

また、マーチングキューブ法を用いて流体の表面をポリゴン化し、レイトレーシング(POV-Ray)を用いてレンダリングを行った。生成された三角メッシュの数は約19,000個であり、シミュレーションの結果、1,000フレームに対するポリゴン化時間は約120分、レンダリング時間は約90分であった。レンダリング結果を図6、および図7に示す。

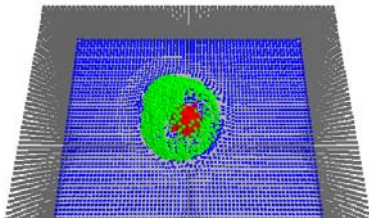
図6は図5の粒子表現をポリゴン表現したものである。ただし、目には見えない泡内部の空気粒子と水粒子を囲む壁粒子は表示していない。また、図7は同じシミュレーションの様子を横から見た図である。図7(a)は初期状態の泡であり、空気粒子の存在する泡の内部空間が空洞になるため、光の屈折により泡の内部が色濃く表れている。シミュレーション開始後、図7(b)に示すようにやや右側に寄った頂点付近の膜が薄くなり、図7(c)で膜の頂点付近に穴が開き、時間の経過に伴い図7(d)のように膜が崩壊する。さらに、膜崩壊後は水面が隆起して、図7(e)に示すように水面は高く上昇する。最終的には、図7(f)に示すように膜の崩壊に伴い、波立ちながら隆起した水は元に戻り、泡は完全に消滅する。



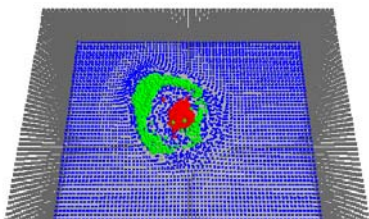
(a) 0.000[s]



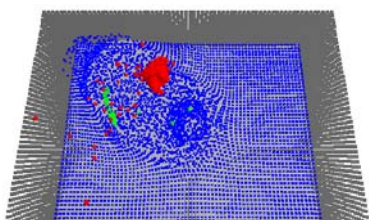
(b) 0.015[s]



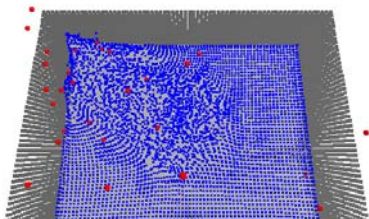
(c) 0.022[s]



(d) 0.030[s]

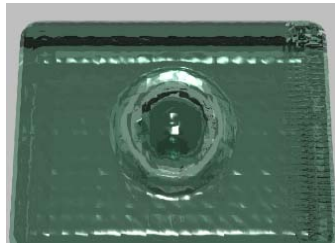


(e) 0.050[s]

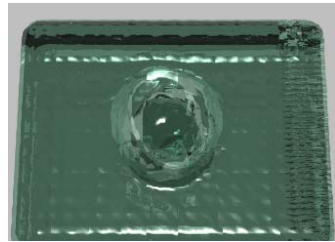


(f) 0.100[s]

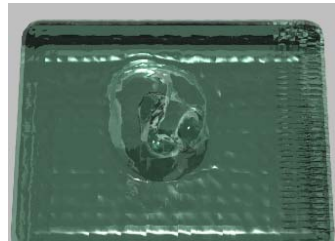
図5: 泡崩壊シミュレーション結果



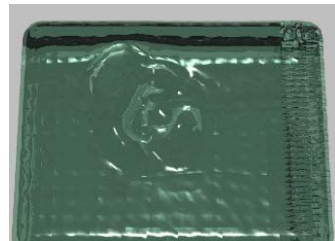
(a) 0.000[s]



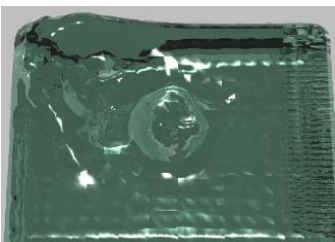
(b) 0.015[s]



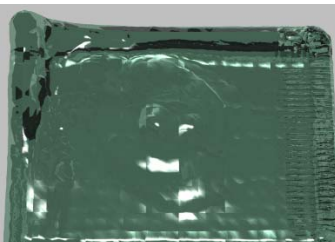
(c) 0.022[s]



(d) 0.030[s]

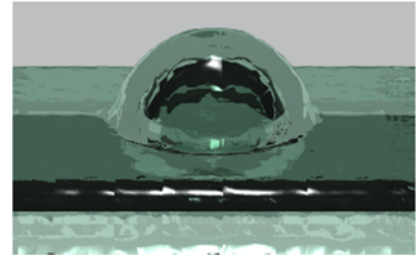


(e) 0.050[s]

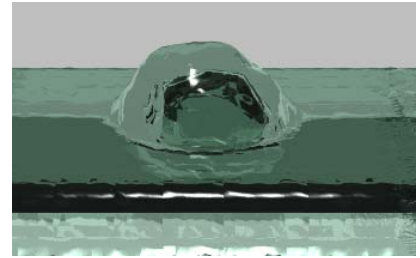


(f) 0.100[s]

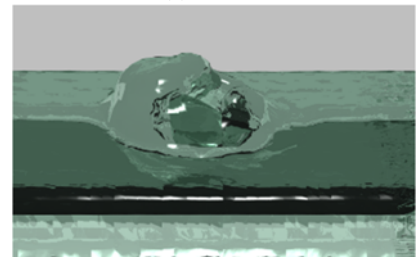
図6: レイトレーシングによるレンダリング結果



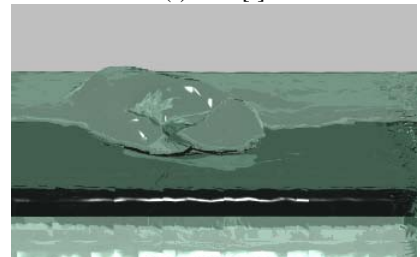
(a) 0.000[s]



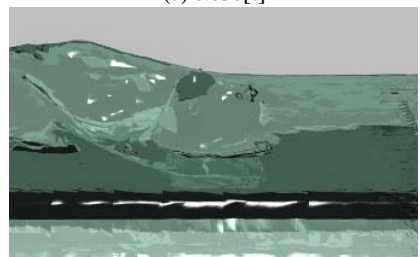
(b) 0.015[s]



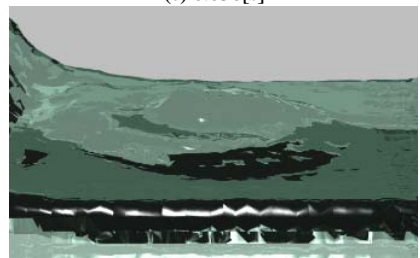
(c) 0.022[s]



(d) 0.030[s]



(e) 0.050[s]



(f) 0.100[s]

図7: レンダリング結果(side view)

#### 4. 評価

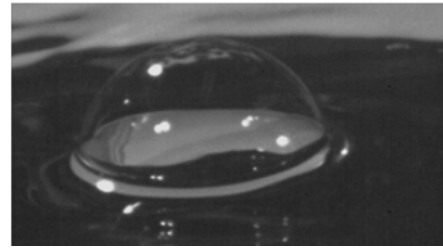
本手法の妥当性を評価するため、本シミュレーションの結果と現実の泡との比較を行った。直方体の水槽にスポットを使用して人為的に発生させた泡を高速カメラを用いて撮影した。撮影に用いた高速カメラの仕様を表3に示す。

表3: 高速カメラの仕様

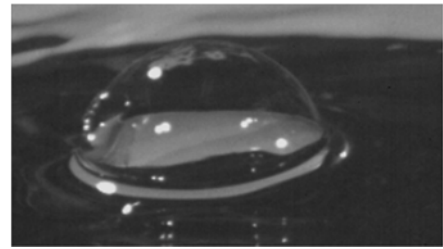
メーカー	DITECT
型番	HAS-D3
フレームレート	5,000 fps
解像度	512×384
枚数	10,921
記録時間	2.18 秒

高速カメラで撮影した泡崩壊の様子を図8に示す。図8(a)は水面上に形成された泡が漂っている様子であり、膜には未だ穴は開いていない。しばらくすると、図8(b)のように膜の左側で円形状の穴が開く。その後、図8(c)に示すように開いた穴は奥側へと同心円状に広がる。そして、図8(d)に示すように広がった穴の一端が水面まで到達すると、穴は半円状へと変化し、穴は右側にも拡大する。このとき、膜は巻き上がるようにして崩壊しているのが確認できる。最終的に、図8(e)に示すように膜を構成していた水は水飛沫となり、泡は崩壊した後、水面は一旦平らになった後、図8(f)に示すように水面の一部が隆起する。

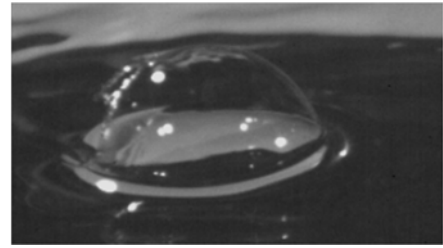
図7と図8を比較すると、図7(b)および(c)では図8(b)および(c)のように膜に穴が開き、その後、図7(d)では図8(d)のように膜に開いた穴が半円状へと拡大している。特に、崩壊した泡が左右対称ではなく、片側に寄って消滅する様子は図7と図8で類似した挙動を示している。また、図7(d)から(e)では、図8(e)から(f)に示すように泡の膜が存在していた領域の水面が隆起していることから、泡の崩壊後における水面の隆起についてもシミュレーション結果は現実の泡の崩壊と同様な挙動を示していることが確認できる。しかしながら、本シミュレーションの結果では、泡が完全に崩壊し、膜が消滅する前に水面が隆起しており、また、泡崩壊後における水面の波高も大きい。これは、泡の径に対する膜の厚みが妥当ではないことが原因であると考えられる。また、本稿は泡の崩壊モデルを検討しているため、泡内部における空気圧を考慮しているが、泡外部にある大気圧を考慮していない。これは大気圧の考慮には大容量のメモリを必要とするからである。今後、大気中の空気粒子を考慮し、大気圧を含むモデルを検討する必要がある。



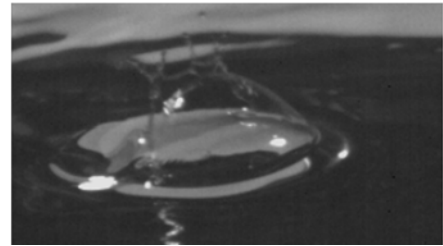
(a) 0.000[s]



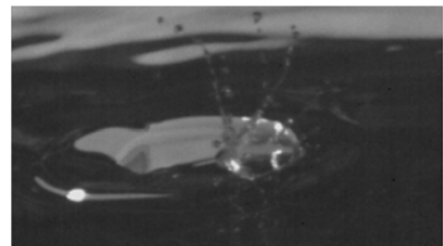
(b) 0.002[s]



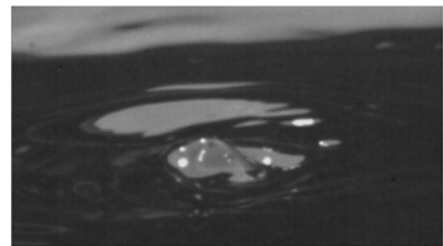
(c) 0.004[s]



(d) 0.006[s]



(e) 0.010[s]



(f) 0.041[s]

図8: 泡の崩壊(side view)

## 5. まとめ

本研究では、粒子法を用いて空気と水の高密度比を考慮した泡の3次元崩壊シミュレーションを行った。シミュレーションの結果、泡の頂点付近で膜が薄くなり、膜に穴が開いた後、泡は円形状に崩壊していく様子を表現することができ、現実の泡崩壊とほぼ同じ結果を得ることができた。また、泡崩壊後には膜粒子が水粒子となるため水面が盛り上がり、水面が波打つ様子を観察することもできた。しかしながら、泡崩壊後における水面の隆起や波の高さなど現実の泡との相違点があるため、今後、これらの課題を解決していく必要がある。また、大気中の空気粒子を考慮したシミュレーションや泡が水中から浮上し、水面上で崩壊する一連の動作をシミュレーションする予定である。

## 参考文献

- [1] S. Patkar, M. Aanjaneya, D. Karpman, and R. Fedkiw, "A Hybrid Lagrangian-Eulerian Formulation for Bubble Generation and Dynamics", Proceedings of the 12th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp.105-114, 2013.
- [2] 須藤健太郎, 越塚誠一, "粒子法による泡の運動シミュレーション", 計算力学講演会論文集2006, Vol.19, pp.703-704, 2006.
- [3] J. Hong, H. Lee, J. Yoon, C. Kim, "Bubbles alive", ACM Trans. on Graphics, Vol.27, Issue.3, No.48, 2008.
- [4] 越塚誠一, "粒子法", 丸善, 東京, 2004.
- [5] N. Mukai, N. Kagatsume, and M. Nakagawa, "Rupture simulation of a bubble with MPS", SIGGRAPH2012 Posters, pp.759-762, 2012.
- [6] 三田直紀, 張英夏, 向井信彦, "粒子法を用いた泡の3次元崩壊シミュレーション", NICOGRAPH2013論文集, pp.205-206, 2013.
- [7] 三田直紀, 張英夏, 向井信彦, "高密度比を考慮した泡の3次元崩壊シミュレーション", NICOGRAPH2014論文集, pp.37-43, 2014.
- [8] J. C. Bird, R. de Ruiter, L. Courbin, and H. A. Stone, "Daughter bubble cascades produced by folding of ruptured thin films", Nature, Vol.465, pp.759-762, 2010.
- [9] M. Kondou, and S. Koshizuka, "Improvement of stability in moving particle semi-implicit method", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.65, pp.638-654, 2011.

三田直紀



2014年, 東京都市大学知識工学部卒業. 東京都市大学大学院工学研究科在学中. コンピュータグラフィックスの研究に興味を持つ.

張英夏



1998年, 韓国梨花女子大学工学部卒業. 2004年, 東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程修了. 同年, 同大研究員. 2006年, 同大学院情報理工学研究科助手. 2007年, 同大学院情報理工学研究科助教. 2012年, 東京都市大学知識工学部講師, 現在に至る. コンピュータグラフィックス, 画像処理の研究に従事. Ph.D.

向井信彦



1983年, 大阪大学基礎工学部卒業. 1985年, 同大学院博士前期課程修了. 同年三菱電機(株)入社. 1997年, コーネル大学コンピュータサイエンス修士課程修了. 2001年, 大阪大学大学院博士後期課程修了. 博士(工学). 2002年, 武蔵工業大学(現東京都市大学)工学部助教授. 2007年, 同大知識工学部教授. 画像工学に関する研究に従事. ACM, 芸術科学会, 映像情報メディア学会など各会員. 著書は"IT Text コンピュータグラフィックス(オーム社)", "基礎からのコンピュータグラフィックス(日新出版)"など.